

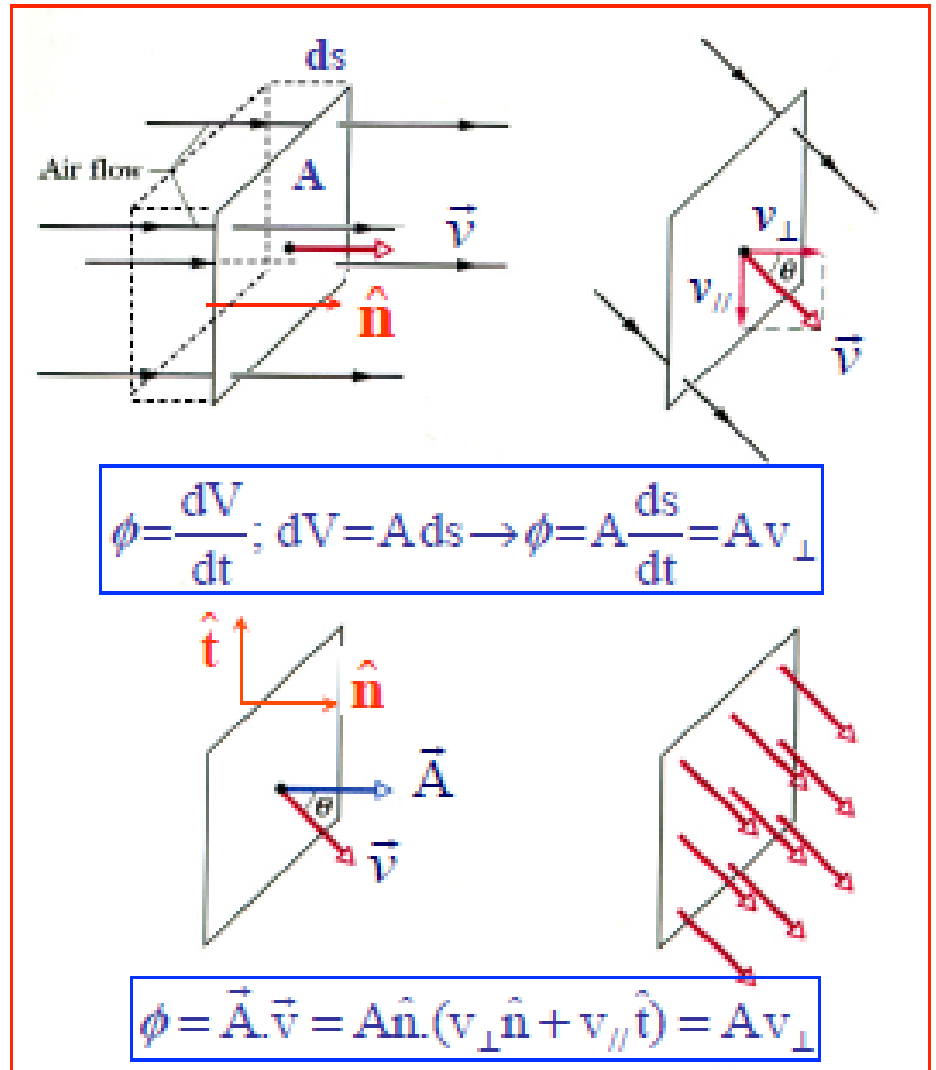
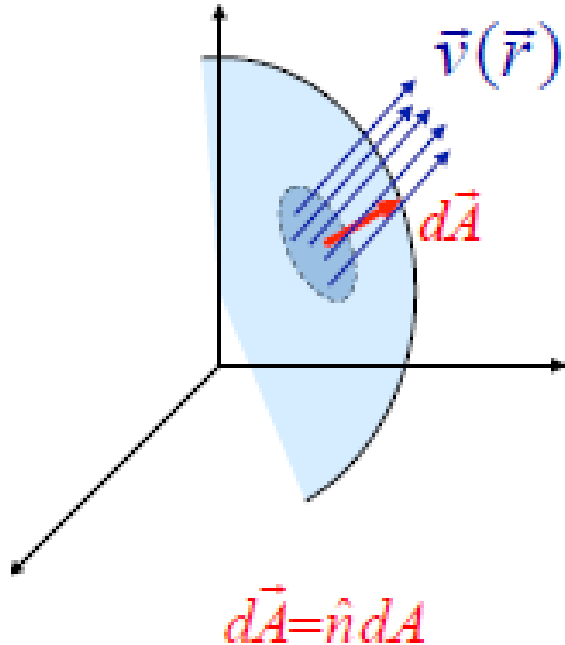
Aula 3: A Lei de Gauss

Curso de Física Geral-
Eletricidade Básica
Ana Barros

Fluxo de um campo vetorial

Definição:

$$\phi = \int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA$$

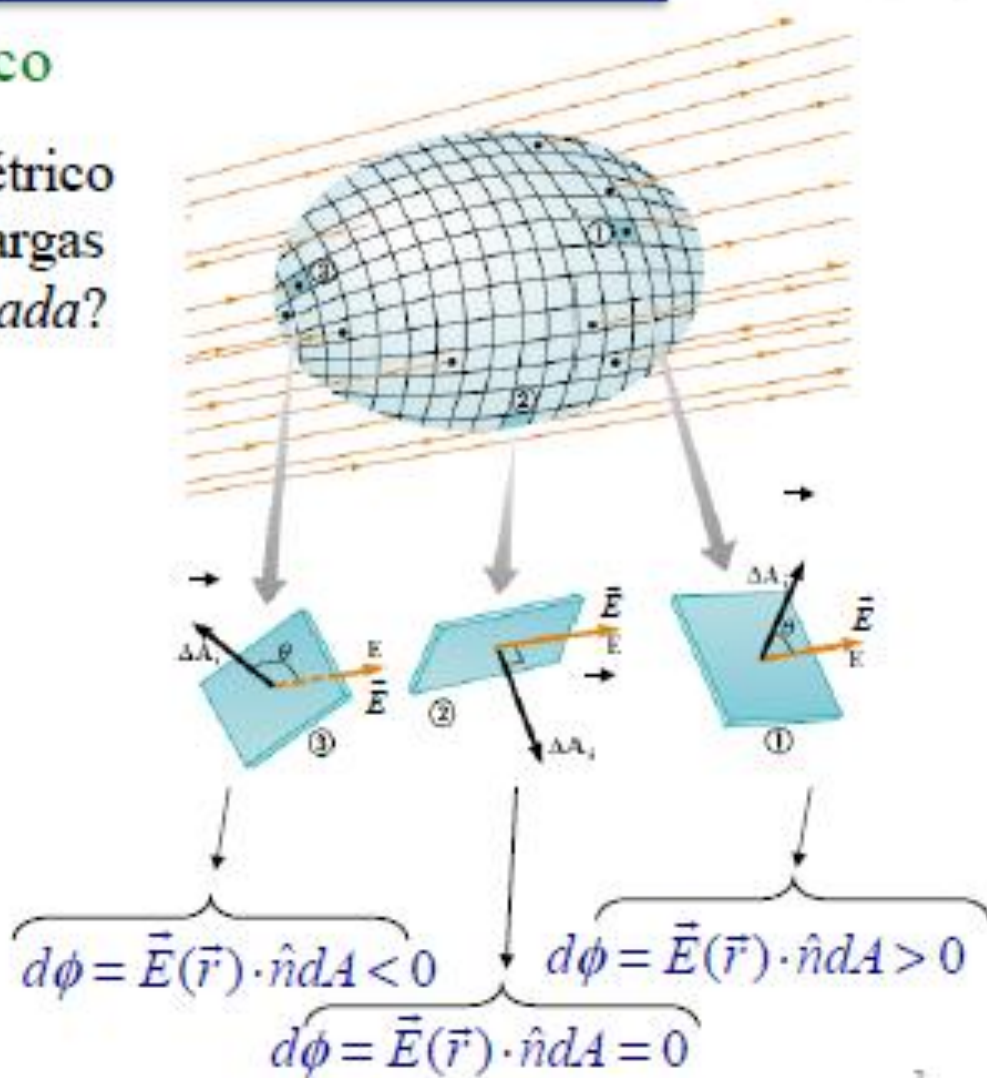
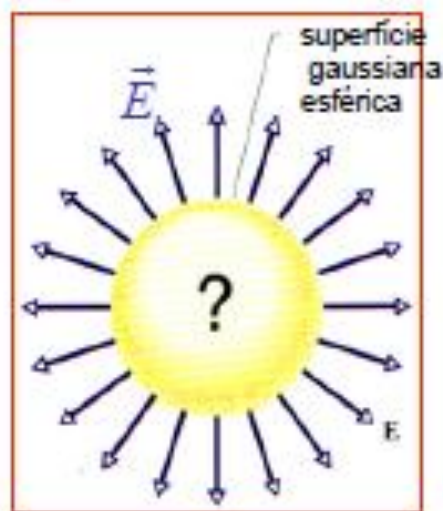


Fluxo de um campo vetorial

O fluxo do campo elétrico

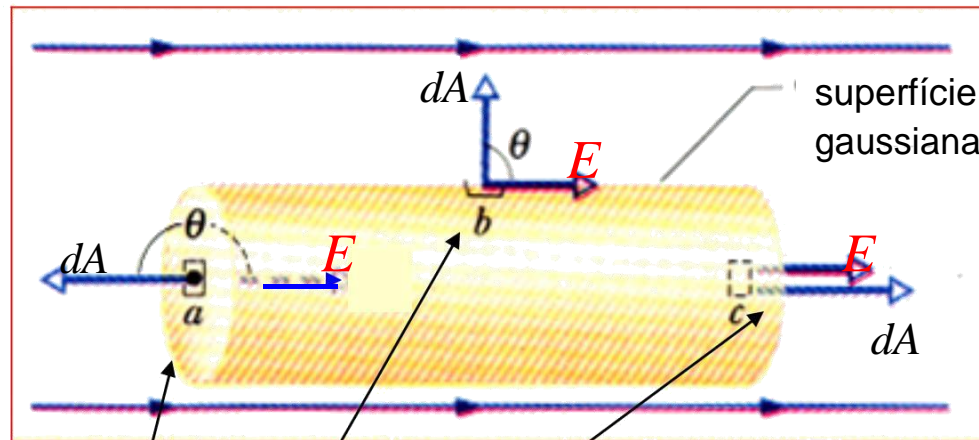
Qual é o fluxo do campo elétrico de uma dada distribuição de cargas através de uma superfície *fechada*?

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA$$



Fluxo de um campo vetorial

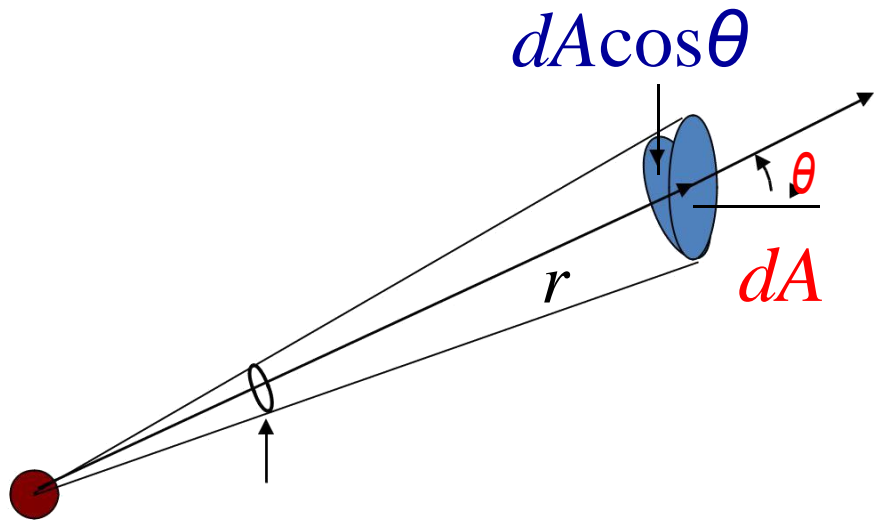
Superfície cilíndrica cujo eixo coincide com a direção de um campo elétrico uniforme



$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -EA + 0 + EA = 0$$

Fluxo de um campo vetorial

Ângulo sólido e lei de Gauss



$$d\Omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2}$$

$$dA \cos \theta = r^2 d\Omega$$

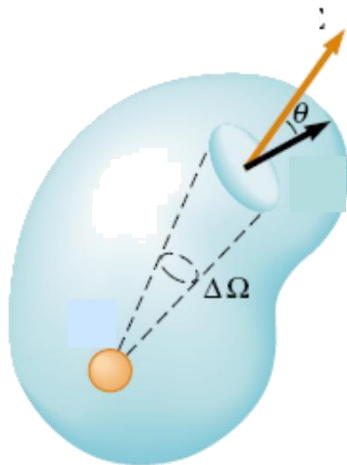
$$d\phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = E(\vec{r}) dA \cos \theta$$



$$d\phi = E(\vec{r}) r^2 d\Omega$$

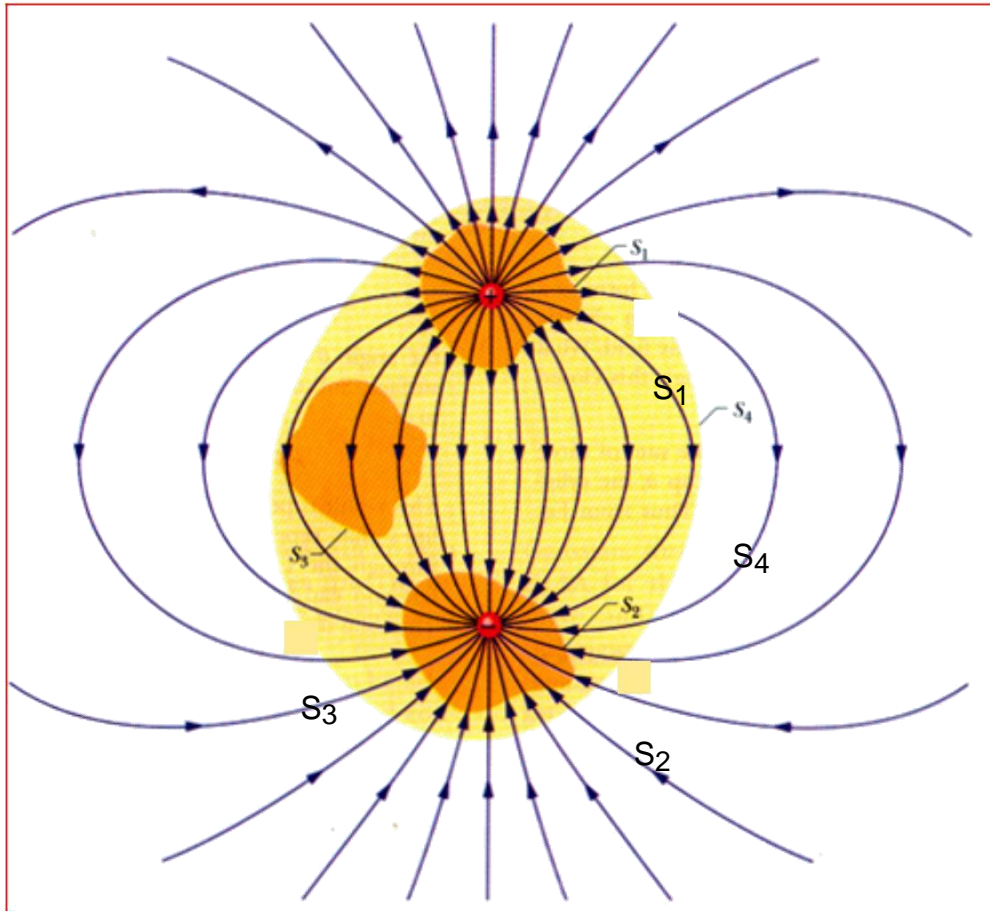


$$\phi = \int d\phi = \int_0^{4\pi} \frac{qr^2 d\Omega}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

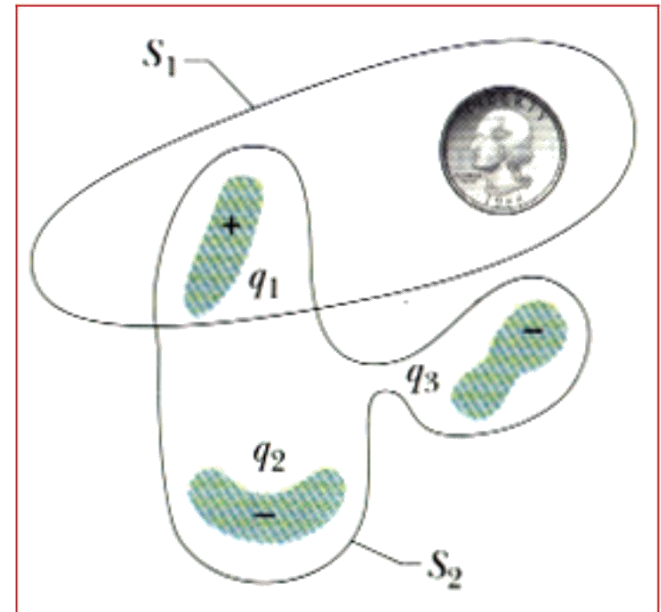


A Lei de Gauss

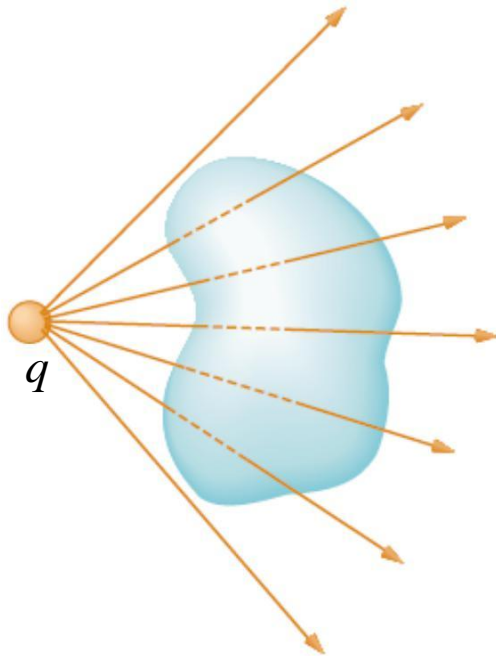
Esta lei relaciona os valores do campo elétrico em pontos de uma superfície (*gaussiana*) com a *carga total dentro* da superfície:



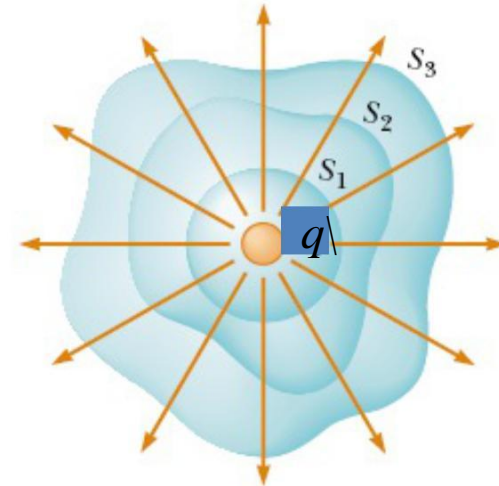
$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



A Lei de Gauss: Ilustrações



Uma carga puntiforme fora de uma superfície fechada. O número de linhas de força que entram na superfície é igual ao número de linhas que saem dela. O fluxo total é nulo.



Superfícies fechadas de vários formatos envolvendo uma carga q . O fluxo através de todas as superfícies é o mesmo.

Cálculo de campo elétrico

A lei de Gauss é *geral*, mas a sua **utilidade no cálculo do campo elétrico** criado por uma distribuição de cargas depende da **simetria** desta distribuição.

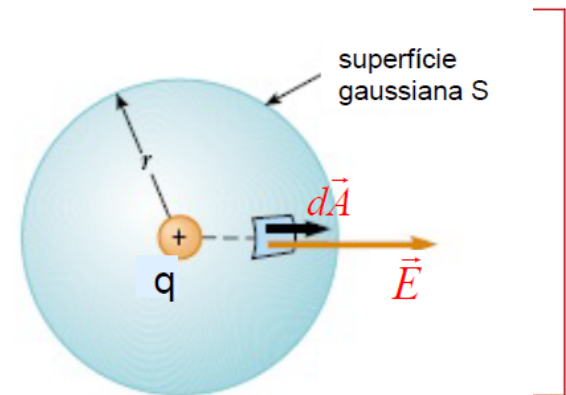
Carga puntiforme (simetria esférica)

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Nos pontos de S : $\begin{cases} \vec{E} \text{ paralelo a } \hat{n} \\ |\vec{E}| = \text{uniforme} \end{cases}$
Então:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \therefore$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$



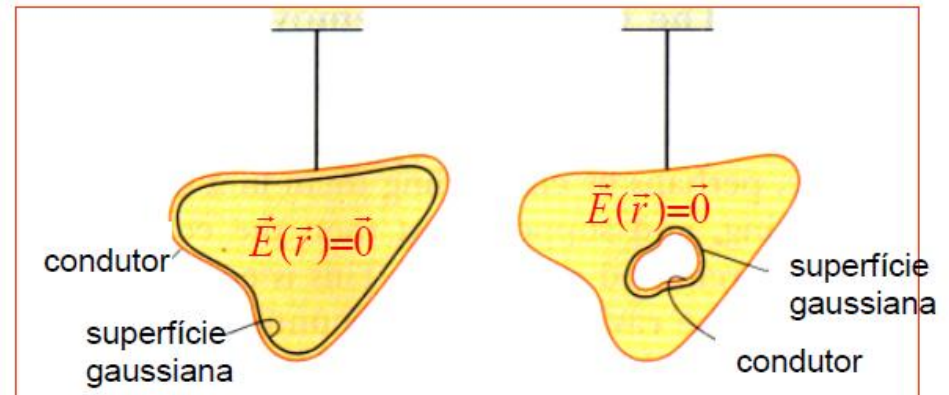
Cálculo de campo elétrico: Condutores

O **campo elétrico** no interior de um condutor *em equilíbrio eletrostático* é sempre nulo. Assim sendo, a lei de Gauss nos permite demonstrar que todo o **excesso de carga** no condutor deverá migrar para a sua **superfície**.

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

↓

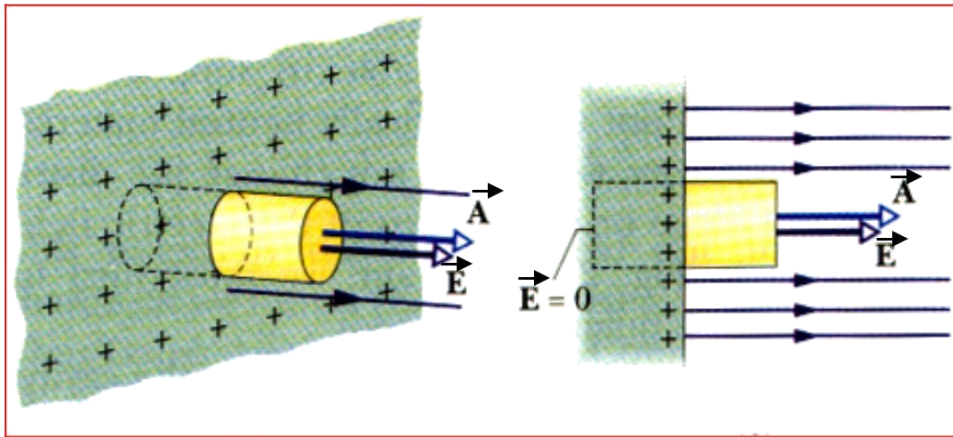
$$\phi = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$



No caso de haver uma **cavidade** no condutor, a lei de Gauss nos diz que o **excesso de carga** se situa na **superfície externa** do condutor.

Cálculo de campo elétrico

Simetria plana: camada condutora



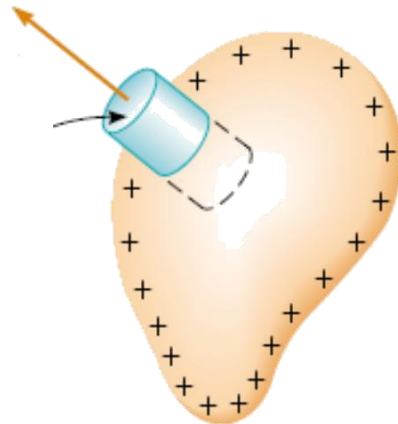
$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



$$\epsilon_0 EA = \sigma A$$



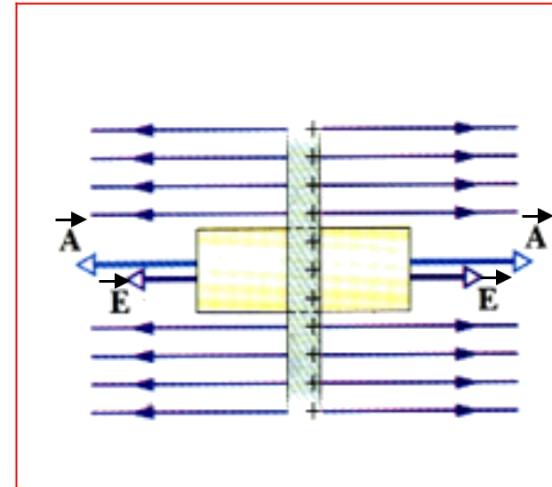
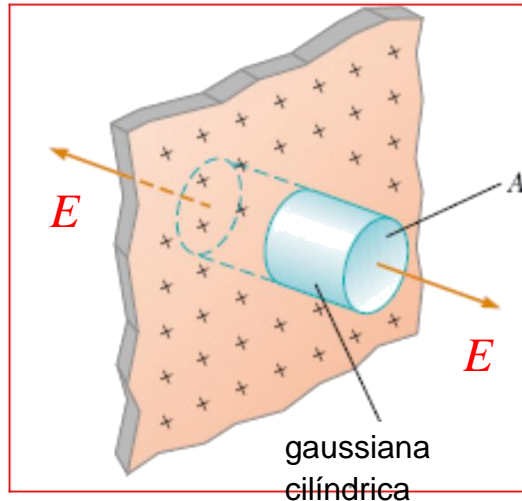
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$



↪ O campo deve ser sempre **perpendicular** à superfície do condutor carregado, em equilíbrio eletrostático. Por quê?

Cálculo de campo elétrico

Simetria plana: placa não condutora



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



$$2\epsilon_0 EA = \sigma A$$



$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Cálculo de campo elétrico

Carga induzida em uma camada condutora neutra

Determinar as cargas induzidas nas superfícies interna e externa da camada.

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

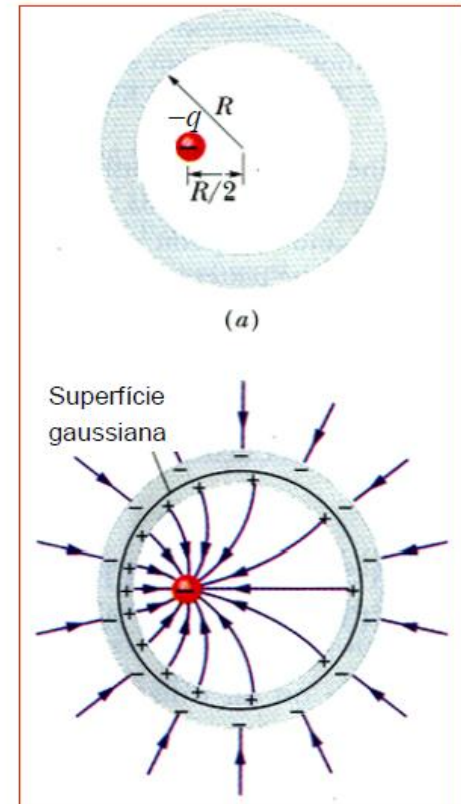
Para uma gaussiana no interior da camada:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{-q}{\epsilon_0} + \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$



$$q_{\text{int}} = +q \quad \text{e} \quad q_{\text{ext}} = -q$$

Note que σ_{int} não é uniforme. E σ_{ext} ?



Cálculo de campo elétrico

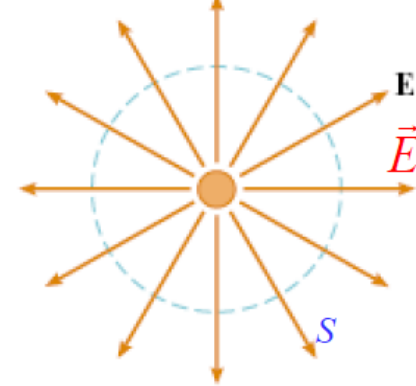
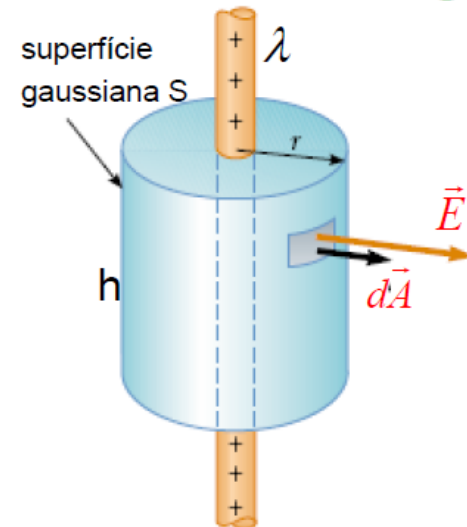
Simetria cilíndrica: fio infinito uniformemente carregado

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Nos pontos de S : $\begin{cases} \vec{E} \text{ paralelo a } \hat{n} \\ |\vec{E}| = \text{constante} \end{cases}$

$$\phi = E(\vec{r}) 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{r}$$



vista de topo

Cálculo de campo elétrico

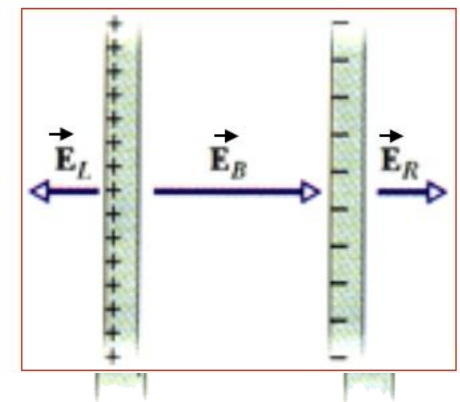
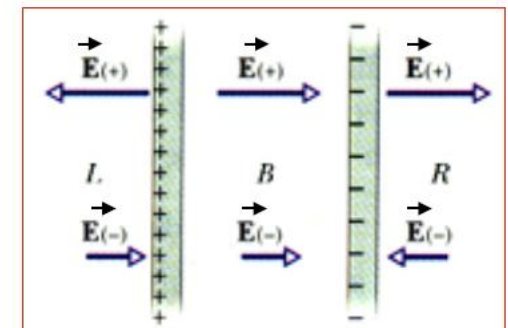
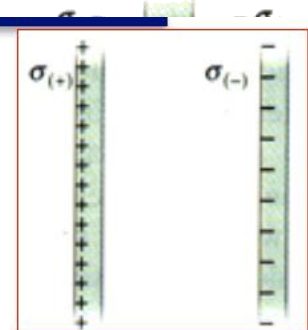
Duas placas não condutoras

Densidades superficiais de carga $\sigma_{(+)}$ e $-\sigma_{(-)}$

$$E_{(+)} = \begin{cases} \frac{\sigma_{(+)}}{2\epsilon_0} & \text{à direita da placa} \\ -\frac{\sigma_{(+)}}{2\epsilon_0} & \text{à esquerda da placa} \end{cases}$$

$$E_{(-)} = \begin{cases} -\frac{\sigma_{(-)}}{2\epsilon_0} & \text{à direita da placa} \\ \frac{\sigma_{(-)}}{2\epsilon_0} & \text{à esquerda da placa} \end{cases}$$

$$E_R = \frac{\sigma_{(+)} - \sigma_{(-)}}{2\epsilon_0}; \quad E_L = \frac{\sigma_{(-)} - \sigma_{(+)}}{2\epsilon_0}; \quad E_B = \frac{\sigma_{(+)} + \sigma_{(-)}}{2\epsilon_0}$$



Cálculo de campo elétrico

Duas placas condutoras

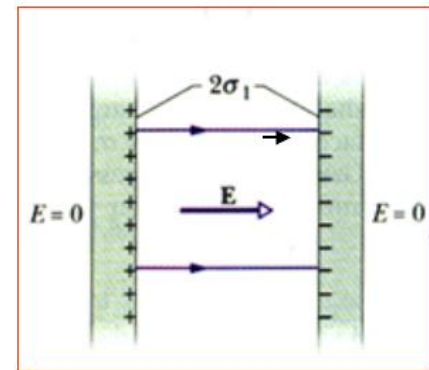
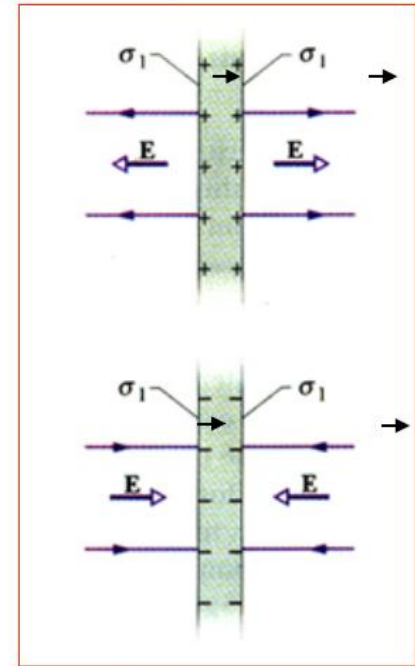
Densidades superficiais de carga σ_1 e $-\sigma_1$

$$E_1 = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} & \text{à direita da placa} \\ -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} & \text{à esquerda da placa} \end{cases}$$

$$E_2 = \begin{cases} -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} & \text{à direita da placa} \\ \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} & \text{à esquerda da placa} \end{cases}$$

Aproximando as placas:

$$E_{total} = E_1 + E_2 = \begin{cases} \frac{2\sigma_1}{\epsilon_0} & \text{entre as placas} \\ 0 & \text{fora das placas} \end{cases}$$



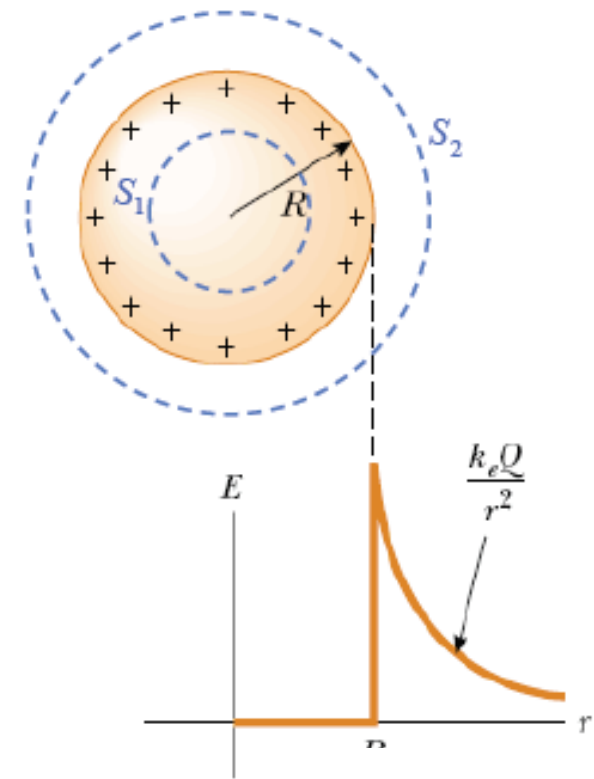
Cálculo de campo elétrico

Simetria esférica: esfera condutora carregada (ou casca esférica carregada)

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{se } r > R \\ 0, & \text{se } r < R \end{cases}$$



Cálculo de campo elétrico

Simetria esférica: esfera não condutora uniformemente carregada

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & \text{se } r > R \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & \text{se } r < R \end{cases}$$

