Aula 5: Capacitância

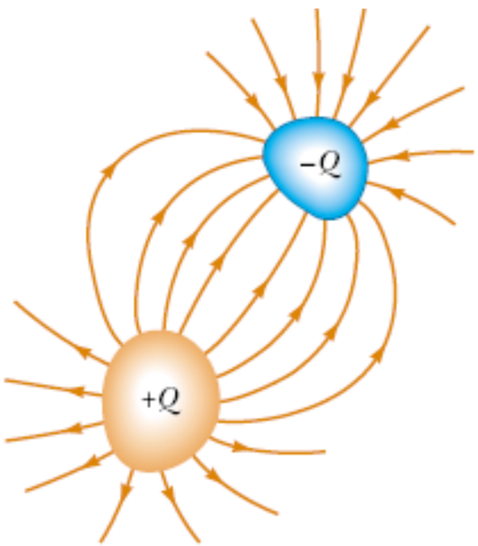
Curso de Física Geral III

Profa. Ana Barros

Capacitância

Capacitores

Dois condutores carregados com cargas $+Q$ e $-Q$ e isolados, de formatos arbitrários, formam o que chamamos de um *capacitor* .

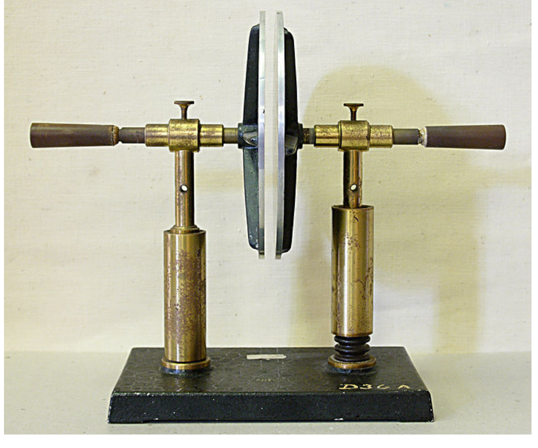


A sua utilidade é *armazenar energia potencial* no *campo elétrico* por ele formado .

História – Garrafa de Leiden e bateria

Quatro capacitores carregados formando uma “Bateria”. Esse sistema foi usado por **Daniel Gralath** para *armazenar energia potencial* no *campo elétrico* existente no interior dos capacitores - 1756.

Daniel Bernoulli, e Alessandro Volta, mediram a força entre placas de um capacitor, e Aepinus em 1758 foi quem que supôs que era uma lei de inverso-de-quadrado. (Em 1785 - Lei de Coulomb).

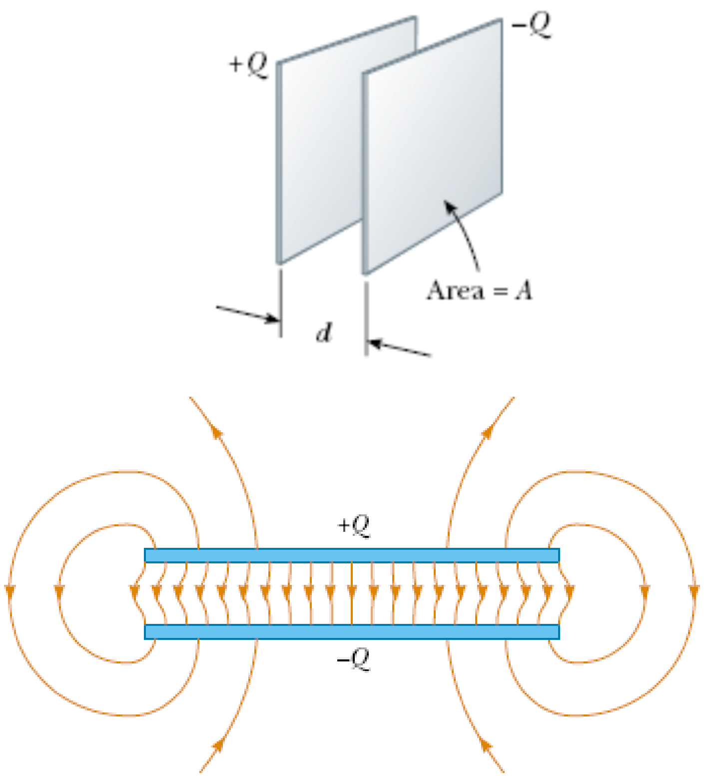


Réplica do sistema de Gralath exitente no museu de Ciência da Cidade de Leiden (Holanda).

Capacitância

Capacitores

O capacitor mais convencional é o de *placas paralelas* . Em geral, dá-se o nome de *placas do capacitor (ou armaduras)* aos condutores que o compõem, independentemente das suas formas.



Capacitor de placas paralelas

Outros capacitores

Capacitância

Capacitores

Como as placas do capacitor são condutoras, elas formam *superfícies equipotenciais*. A carga nas placas é proporcional à diferença de potencial entre elas, ou seja:

$$Q = CV \ ,$$

onde C é a chamada *capacitância* do capacitor. Então:

$$C = \frac{Q}{V}$$

A constante C depende apenas da *geometria* do capacitor. No SI a capacitância é medida em *farads* (F).

$$1\,\text{farad} = 1\,\text{F} = 1\,\text{coulomb/volt} = 1\,\text{C/V}$$

$$1 \ \mu\text{farad} = 10^{-6}\,\text{F}$$

Importante: $\varepsilon_0 = 8{,}85\,\text{pF/m}$

Cálculo da Capacitância

Esquema de cálculo

Em geral, os capacitores que usamos gozam de alguma simetria, o que nos permite calcular o campo elétrico gerado em seu interior através da lei de Gauss:

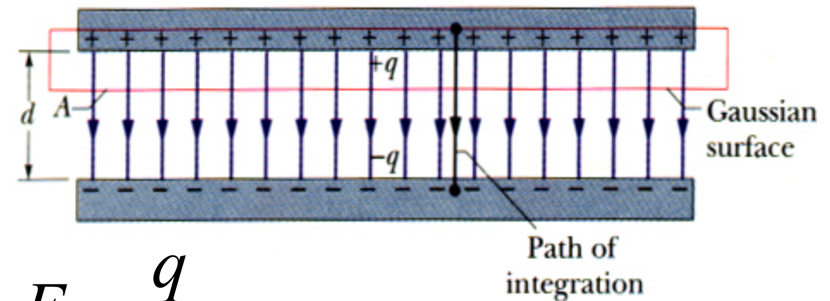
$$\varphi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

De posse do campo elétrico, podemos calcular a diferença de potencial entre as duas placas como:

$$V = V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

E, finalmente, usamos o resultado anterior em $Q = CV$, de onde podemos extrair C.

Capacitância: Exemplos



Capacitor de placas paralelas

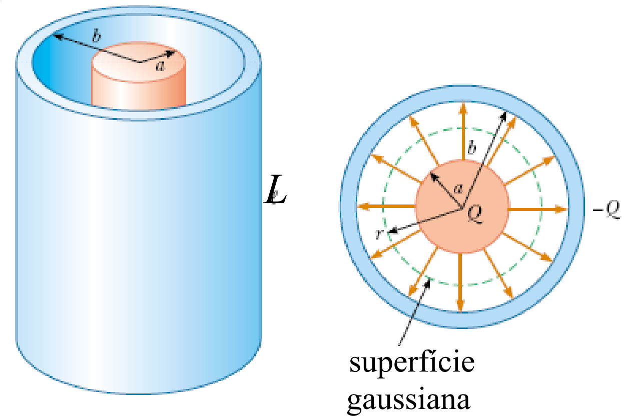
$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad \Longrightarrow \quad V = Ed$$

$$q = CV \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Nota-se que a capacitância é proporcional a um comprimento e só depende de *fatores geométricos* do capacitor.

Capacitância: Exemplos



Capacitor cilíndrico

$(L >> b)$

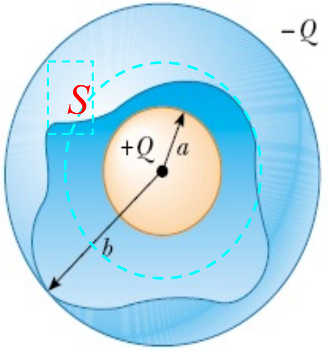
$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{Q}{2\pi\,\varepsilon_0 L r}$$

$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Q = CV \quad \Longrightarrow \quad C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Capacitância: Exemplos

Capacitor esférico



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

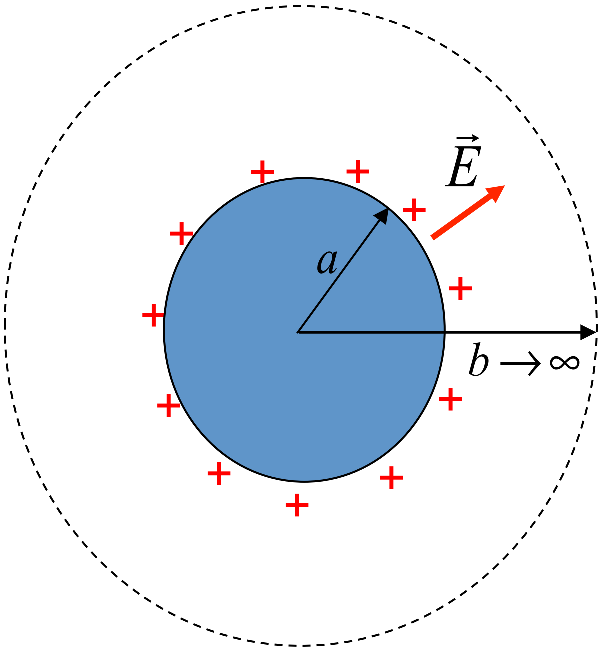
$$V_f - V_i = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

$$Q = CV \quad \Longrightarrow \quad C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

Capacitância: Exemplos

Esfera isolada $(R = a)$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1-\dfrac{a}{b}}$$



$$\Big\downarrow \quad b \to \infty$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0\, a$$

Exemplo numérico:

$$R = 1\,m,\ \varepsilon_0 = 8{,}85\,\mathrm{pF/m} \quad \Longrightarrow \quad C \approx 1{,}1\times 10^{-10}\,\mathrm{F}$$

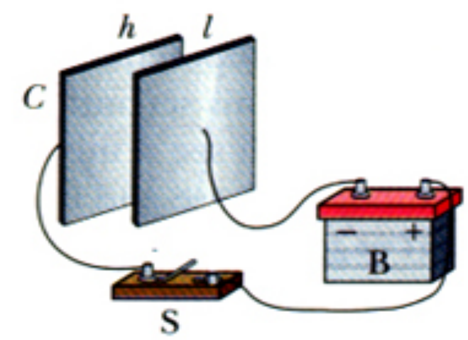
Capacitância

Carregando o capacitor

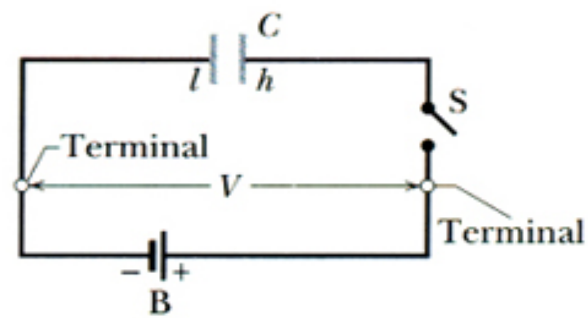
Podemos carregar um capacitor ligando as suas placas a uma bateria que estabelece uma diferença de potencial fixa, V, ao capacitor. Assim, em função de V

$$Q = CV\,,$$

cargas $+Q$ e $-Q$ irão se acumular nas placas do capacitor estabelecendo entre elas uma diferença de potencial $-V$ que se opõe à diferença de potencial da bateria e faz cessar o movimento de cargas no circuito.



(a)



(b)

Associação de capacitores

Associação de capacitores em paralelo

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V \quad \text{e} \quad q_3 = C_3 V$$

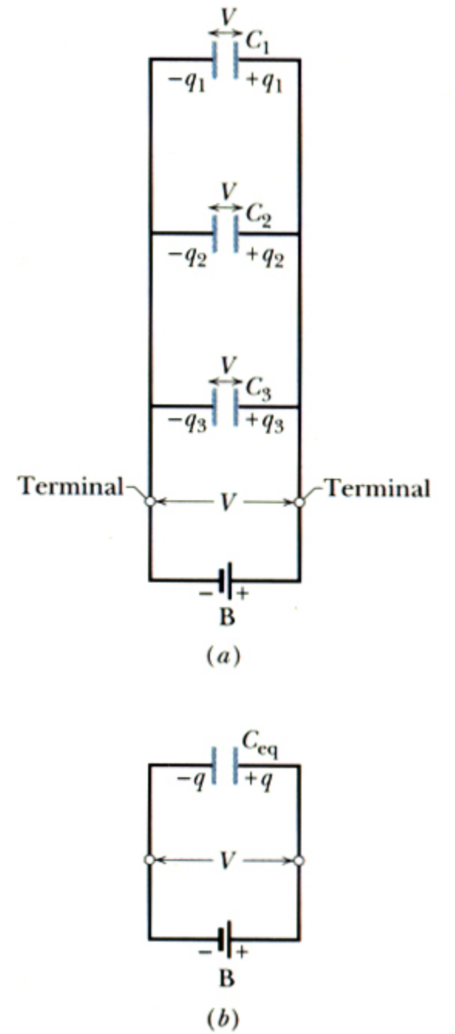
$$q = q_1 + q_2 + q_3 \;\Rightarrow\; q = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

Como $\quad q = C_{eq} V$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

ou

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$



Associação de capacitores

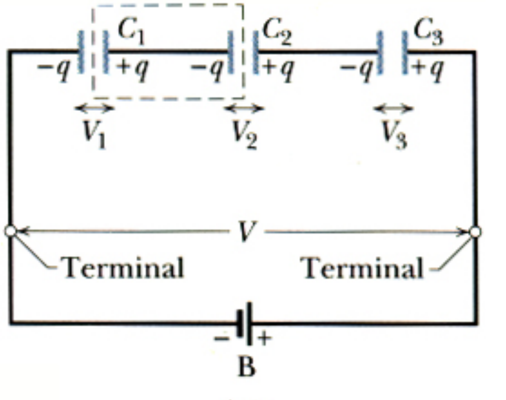
Associação de capacitores em série

$$q = C_1V_1, \quad q = C_2V_2 \quad \text{e} \quad q = C_3V_3$$

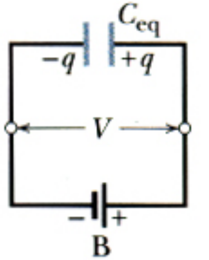
$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Como $V = \dfrac{q}{C_{eq}}$:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$



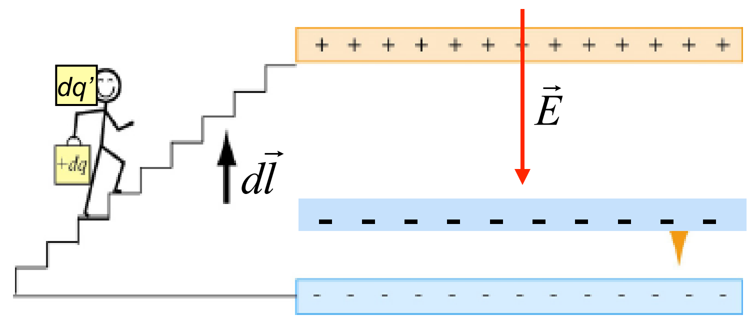
(a)



(b)

Energia armazenada no campo elétrico

Um agente externo deve realizar trabalho para carregar um capacitor. Este trabalho fica armazenado sob a forma de energia potencial na região do campo elétrico entre as placas.



Suponha que haja q' e $-q'$ armazenadas nas placas de um capacitor. O trabalho para se deslocar uma carga elementar dq' de uma placa para a outra é então:

$$dW = V'\,dq' = \frac{q'}{C}\,dq' \quad \Longrightarrow \quad W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}\,dq' = \frac{q^2}{2C}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Energia no capacitor

Densidade de energia

$$u = \frac{\text{energia potencial}}{\text{volume}}$$

Em um capacitor de placas paralelas sabemos que:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad \text{e} \quad V = Ed$$

$$\Downarrow$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}E^2 d^2$$

$$\Downarrow$$

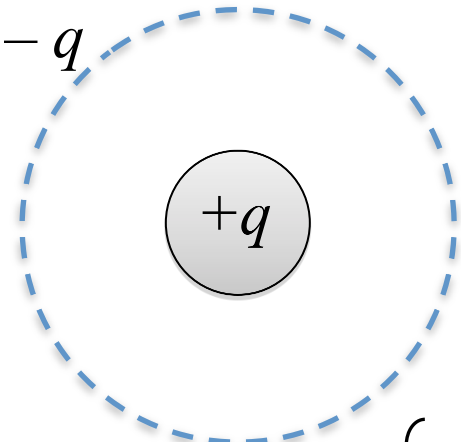
$$u \equiv \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

(Apesar de a demonstração ter sido feita para o capacitor de placas paralelas, esta fórmula é sempre válida!)

Exercício: energia de uma esfera

Considere um condutor esférico de raio R carregado com uma carga q. Qual a energia total neste condutor?

Duas interpretações:



a) Energia potencial de um capacitor esférico de raio R:

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C} \\ C = 4\pi\varepsilon_0 R \end{cases} \Rightarrow U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

b) Integração da densidade de energia u:

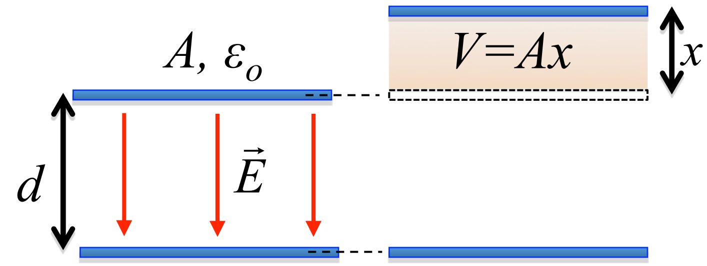
$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases} \Rightarrow U = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r) 4\pi r^2 \, dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

c) Qual o raio R_0 que contém metade da energia total?

$$U(R_0) = \frac{1}{2}U \Rightarrow \int_R^{R_0} (\ldots)\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\int_R^\infty (\ldots)\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2}\frac{1}{R} \Rightarrow R_0 = 2R$$

Uma nova visão de U

a) Qual é o trabalho W necessário para aumentar em x a separação das placas?



- É a energia adicional que apareceu no volume Ax, que antes não existia. Então:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

$$W = U = u\,Ax = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Ax =$$

$$= \frac{1}{2} E\,Ax\,\varepsilon_0 \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2} QEx$$

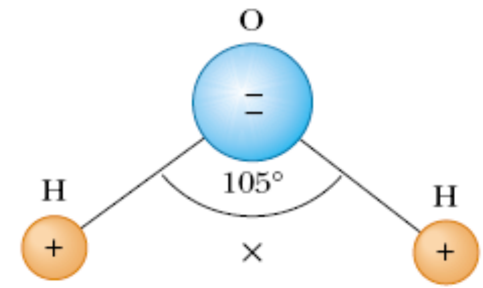
b) Qual é a força de atração entre as placas?

- Como $W = F\,x$ $\Rightarrow$ $F = \frac{1}{2} QE$

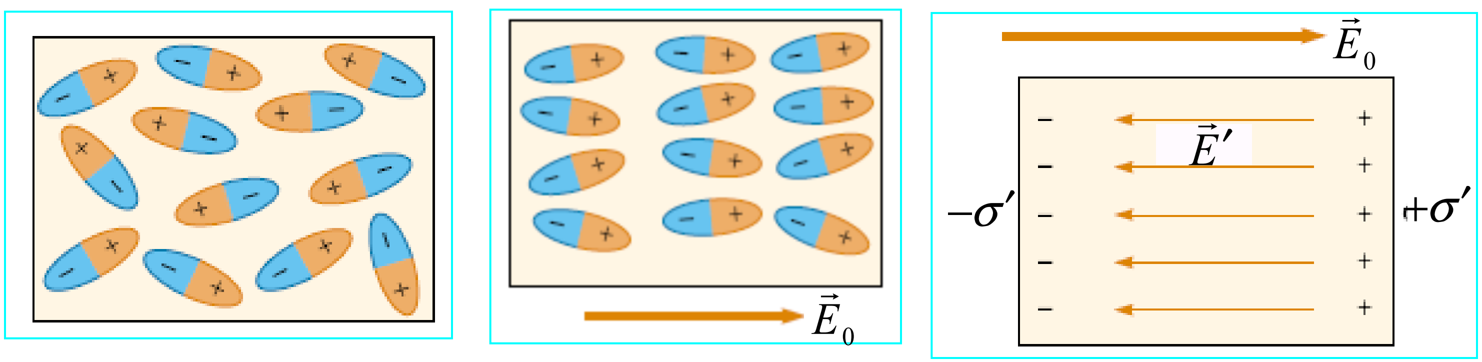
Dielétricos

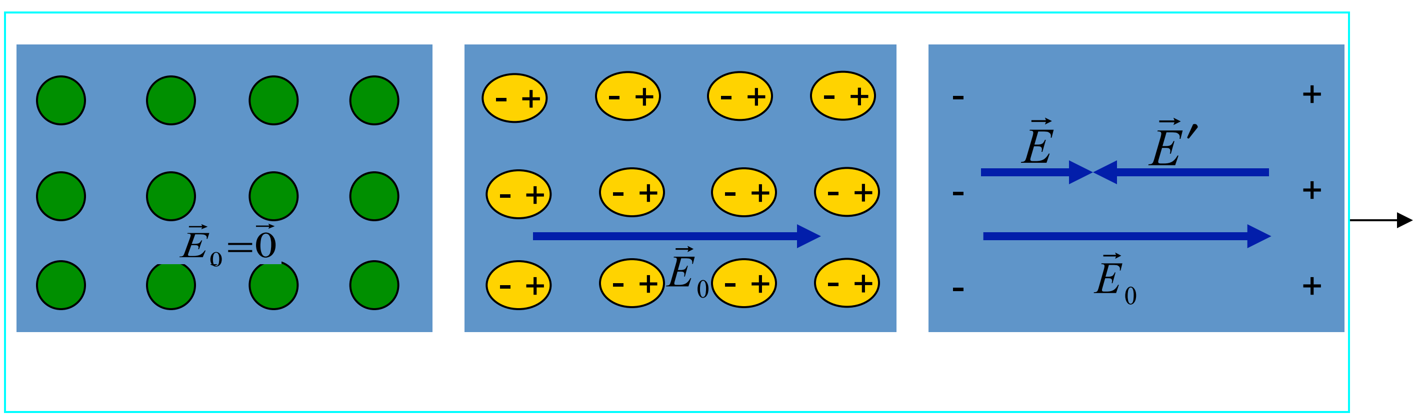
Visão atômica

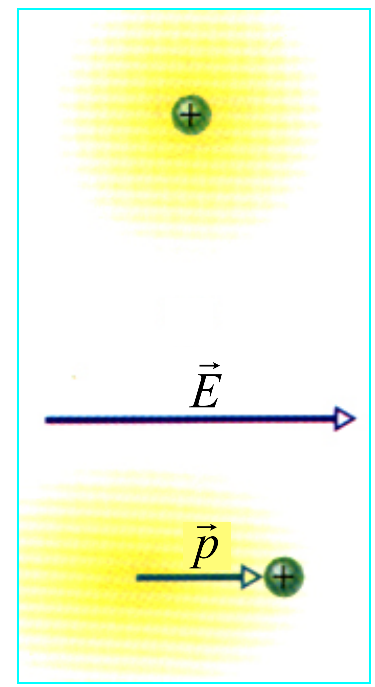
Dielétricos são materiais *isolantes* que podem ser *polares* ou *não-polares*.



um dielétrico polar: molécula de água







dielétrico não-polar

Dielétricos

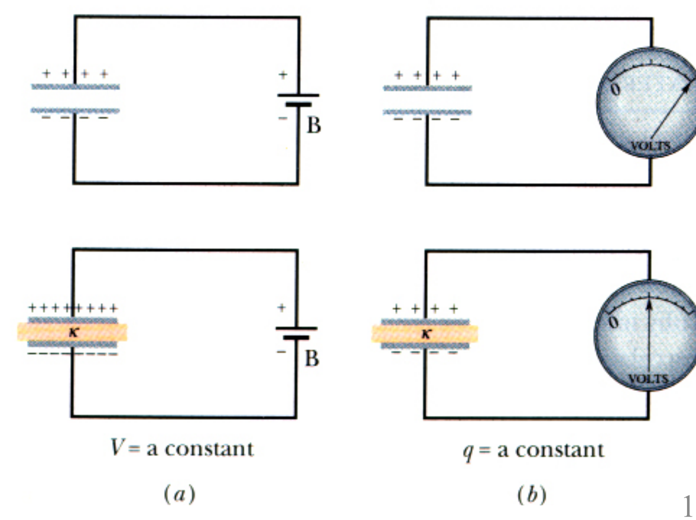
Capacitores com dielétricos

Ao colocarmos um material dielétrico entre as placas de um capacitor, se V é mantido constante, a carga das placas *aumenta*; se Q é mantida constante, V *diminui*. Como $Q = CV$, ambas as situações são compatíveis com o fato de que o dielétrico entre as placas do capacitor faz a sua capacitância aumentar.

Vimos: $C_0=\varepsilon_0\mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}$ é uma função que depende apenas da geometria e tem dimensão de comprimento.

Então, na presença de um dielétrico preenchendo totalmente o capacitor: $C_d = \kappa\varepsilon_0\mathcal{L} = \kappa C_0$, onde $\kappa > 1$

No vácuo, $\kappa = 1$

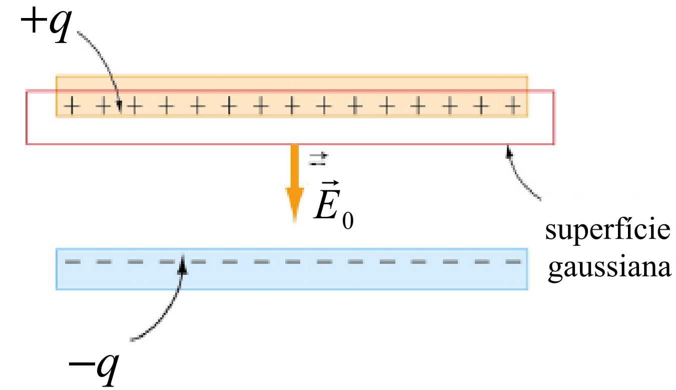


Dielétricos

Material	Constante dielétrica	Resistência Dielétrica (kV/mm)
Ar (1 atm)	1,00054	3
Poliestireno	2,6	24
Papel	3,5	16
Pirex	4,7	14
Porcelana	6,5	5,7
Silício	12	
Etanol	25	
Água (20°)	80,4	
Água (25°)	78,5	

Lei de Gauss com dielétricos

(a): $$\oint_S \vec{E}_0(\vec{r})\cdot\hat{n}dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

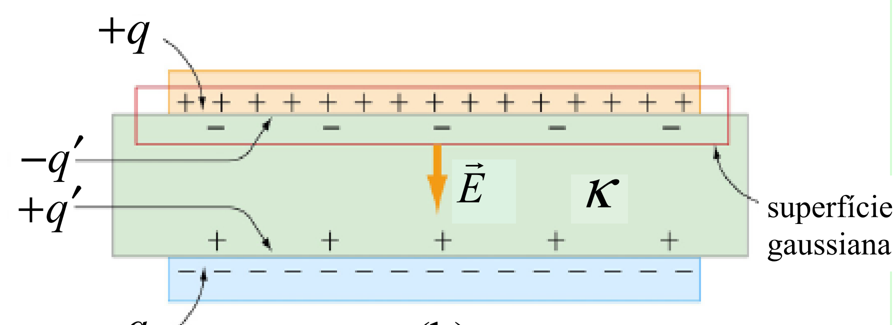


(a)

(b): $$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}dA = \frac{q-q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q-q'}{\varepsilon_0 A}$$

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa\varepsilon_0 A} = \frac{q-q'}{\varepsilon_0 A} \therefore \; q-q' = \frac{q}{\kappa}$$

Em (b): $$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}dA = \frac{q}{\kappa\varepsilon_0}$$



(b)

Ou: $$\oint_A \vec{D}(\vec{r})\cdot\hat{n}dA = q \; ,$$

onde $\vec{D}(\vec{r}) \equiv \kappa\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})$ é o vetor de deslocamento elétrico.

Então, na lei de Gauss expressa com o vetor $\vec{D}$, aparecem apenas as *cargas livres* (das placas).

Dielétricos: Exemplo

Exemplo

Capacitor de placas paralelas com A=115 cm^2, d=1.24 cm, V_0=85.5 V, b=0.78 cm, $\kappa = 2.61$

Calcule:

a) C_0 sem o dielétrico;
b) a carga livre nas placas;
c) o campo E_0 entre as placas e o dielétrico;
d) o campo E_d no dielétrico;
e) a ddp V entre as placas na presença do dielétrico;
f) A capacitância C com o dielétrico.