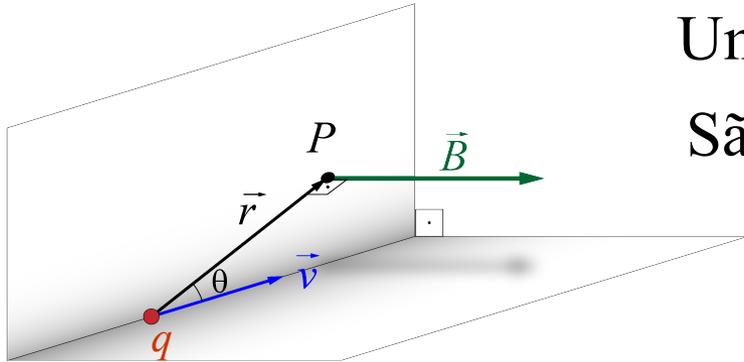


# Aula 9: Campos Magnéticos Produzidos por Correntes

Curso de Física III

Profa Ana Barros

# Campo $\vec{B}$ de uma carga em movimento



Uma carga  $q$  move-se com velocidade  $\vec{v}$ .

São observações experimentais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} \text{ é perpendicular ao plano } (\vec{r}, \vec{v}) \\ B \propto q, v, \frac{1}{r^2}, \text{sen}(\vec{r}, \vec{v}) \end{array} \right.$$

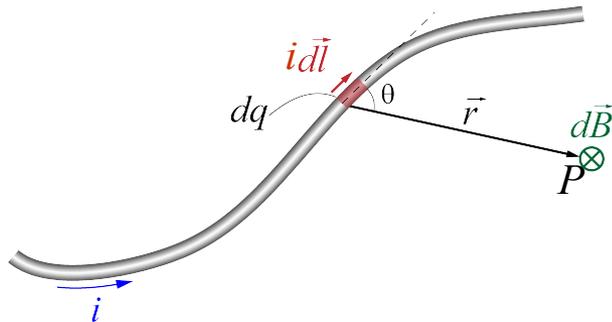
Condensando estas informações em forma vetorial:

$$\vec{B} = k_m \frac{q \vec{v} \times \hat{r}}{r^2}, \text{ onde } k_m = 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$$

$k_m$  pode ser escrita em termos de outra constante :  $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ,

onde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}$  é a **permeabilidade do vácuo**.

# Campo $\vec{B}$ de uma corrente



Campo de  $dq$  com velocidade  $\vec{v}$ :

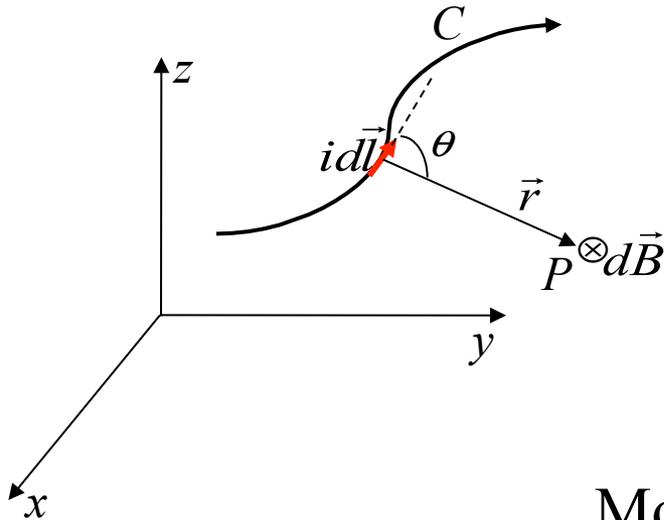
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

Mas:  $\left\{ \begin{array}{l} i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = i dt \\ \text{em } dt \text{ a carga percorre } d\vec{l} = \vec{v} dt \end{array} \right.$

Então: 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}, \quad (\text{Lei de Biot-Savart})$$

onde  $d\vec{l}$  é um elemento de comprimento sobre a linha de corrente, e  $\vec{r}$  é um vetor que vai de  $i d\vec{l}$  até o ponto  $P$ .

# Campo $\vec{B}$ num ponto $P$ qualquer



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

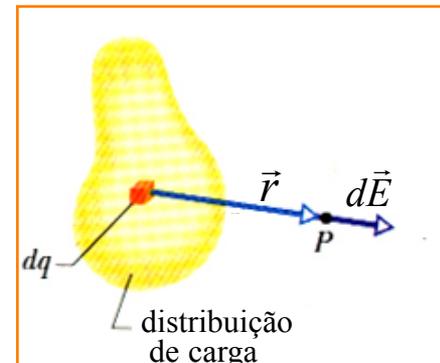
$$\vec{B} = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{Lei de Biot-Savart})$$

Módulo de  $\vec{B}$  :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{idl \sin \theta}{r^2}$$

Analogia com o campo elétrico produzido por uma carga  $dq$ :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} \vec{r}$$



# Campo magnético de um fio retilíneo longo com corrente $i$

Neste caso, a lei de Biot-Savart  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$  se reduz a:

$$dB = \frac{\mu_0 i dz \sin\theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 i dz \sin\beta}{4\pi r^2}$$

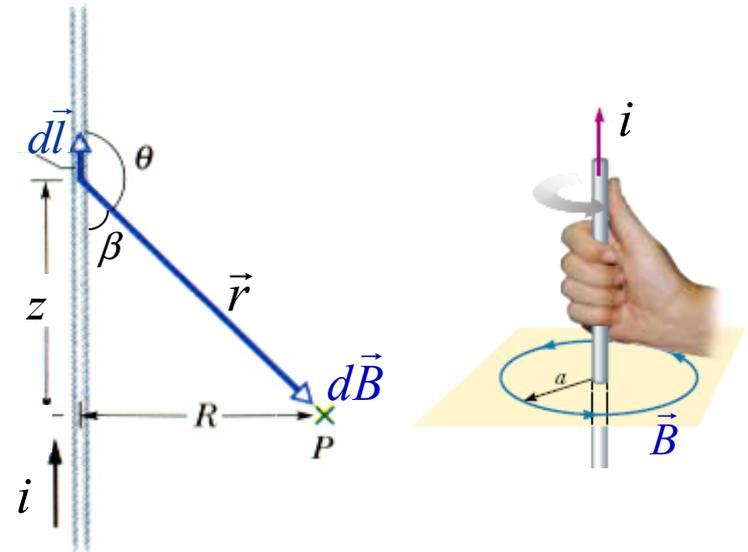
$$(\beta = \pi - \theta \therefore \sin\theta = \sin\beta)$$

Mas: 
$$\begin{cases} \cotg\beta = \frac{z}{R} \rightarrow dz = -R \operatorname{cosec}^2\beta d\beta \\ \sin\beta = \frac{R}{r} \Rightarrow r^2 = R^2 \operatorname{cosec}^2\beta \end{cases}$$

Integrando-se:

$$B = \frac{-\mu_0 i}{2\pi R} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin\beta d\beta = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

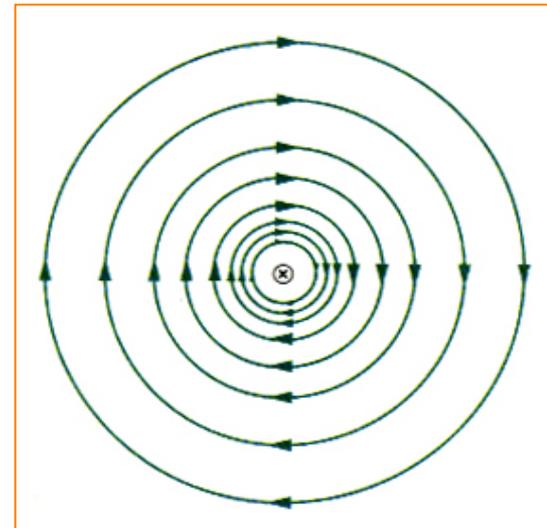
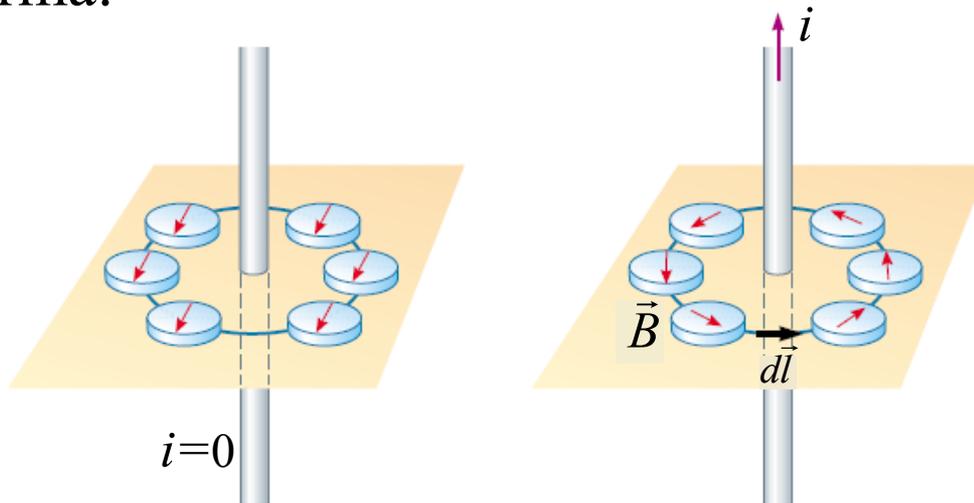
Sentido do campo  $\vec{B}$ : dado pela regra da mão direita ou regra do saca-rolhas (ver figura)



$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \quad (\text{fio semi-infinito})$$

# Campo magnético de um fio infinito

As *linhas de campo magnético* são linhas a partir das quais pode-se visualizar a configuração do campo magnético de uma dada distribuição de correntes no espaço. Como vimos, no entorno de um fio longo transportando uma corrente, elas são da forma:



corrente “entrando” no papel

➡ Observe que as linhas de  $\vec{B}$  são fechadas.

# $\vec{B}$ de uma corrente em um arco circular

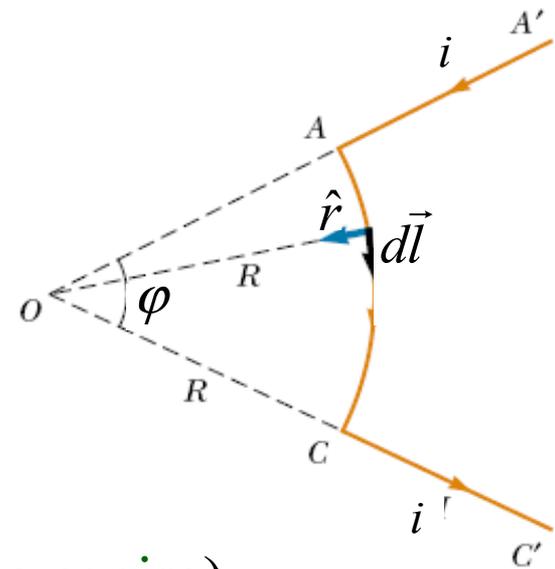
- Calcular o campo magnético no ponto  $O$ .
- Para os segmentos  $AA'$  e  $CC'$  da figura, o produto  $d\vec{l} \times \vec{r}$  é nulo (vetores paralelos e antiparalelos)
- No arco  $AC$ ,  $d\vec{l}$  e  $\vec{r}$  são perpendiculares.

Neste caso:

$$B = \frac{\mu_0 i \varphi}{4\pi R},$$

onde  $\varphi$  é o ângulo central subentendido pelo arco. Se  $\varphi = 2\pi$ :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad (\text{campo no centro de uma espira})$$



# Força entre dois fios condutores paralelos

A corrente do fio  $a$  gera um campo  $\vec{B}_a$  na posição do fio  $b$ :

$$\vec{B}_a = \int_a \frac{\mu_0 i_a d\vec{l}_a \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad \longrightarrow \quad \vec{B}_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d} \hat{e}_\varphi$$

O fio  $b$ , na presença de  $\vec{B}_a$ , fica sujeito a uma uma força dada por:

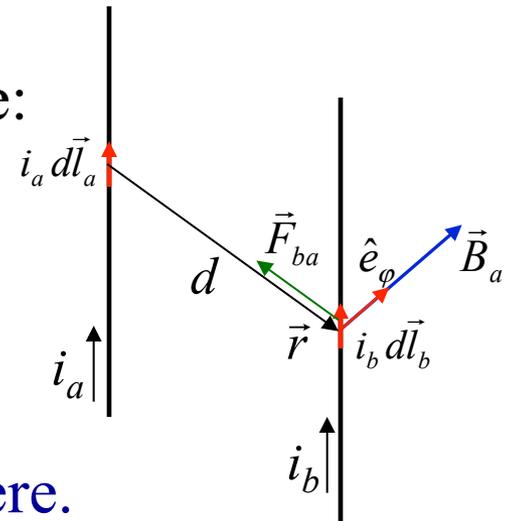
$$d\vec{F}_{ba} = i_b d\vec{l}_b \times \vec{B}_a = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} d\vec{l}_b \times \hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} dl_b (-\hat{r}) \quad (\text{de atração, neste caso})$$

A força sobre um comprimento  $L_b$  do fio  $b$  vale:

$$\vec{F}_{ba} = \frac{\mu_0 i_a i_b L_b}{2\pi d} (-\hat{r}) \quad \text{ou} \quad \frac{F_{ba}}{L_b} = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d}$$

(módulo da força por unidade de comprimento)

Esta expressão possibilita a definição do ampère.



# Campo magnético de uma bobina

O campo de uma bobina não tem simetria suficiente para ser calculado pela lei de Ampère. Usaremos a lei de Biot-Savart para calcular  $\vec{B}$  *em pontos do eixo central da espira*.

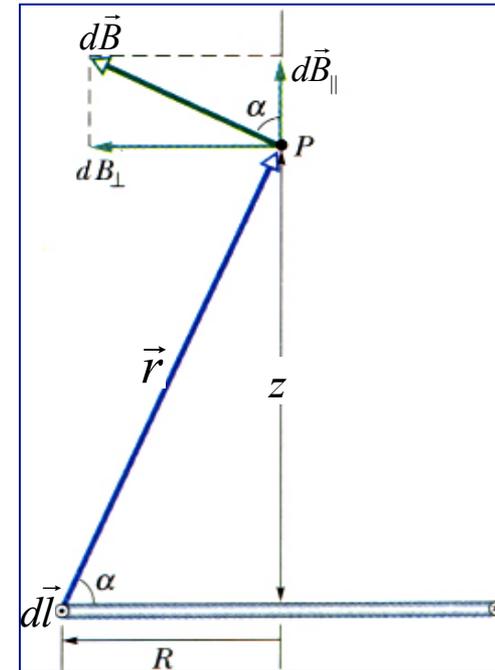
$$\text{Temos: } d\vec{B}(z) = d\vec{B}_{\parallel} + d\vec{B}_{\perp}$$

Como a soma vetorial dos  $d\vec{B}_{\perp}$  se anula:

$$B(z) = \int dB_{\parallel} = \int dB \cos \alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 i dl}{4\pi r^2} \sin(90^\circ)$$

$$r^2 = R^2 + z^2 \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$



Substituindo essas três relações na integral de  $B(z)$  tem-se:

$$B(z) = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_{\text{espira}} dl \quad \longrightarrow \quad B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

# Campo magnético de uma bobina

Vimos:

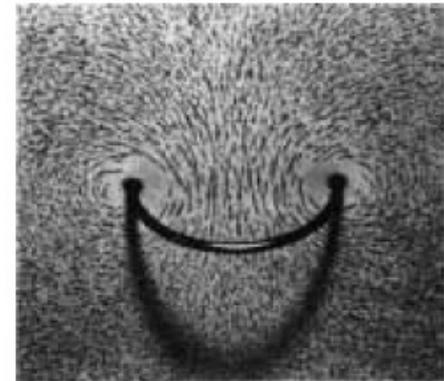
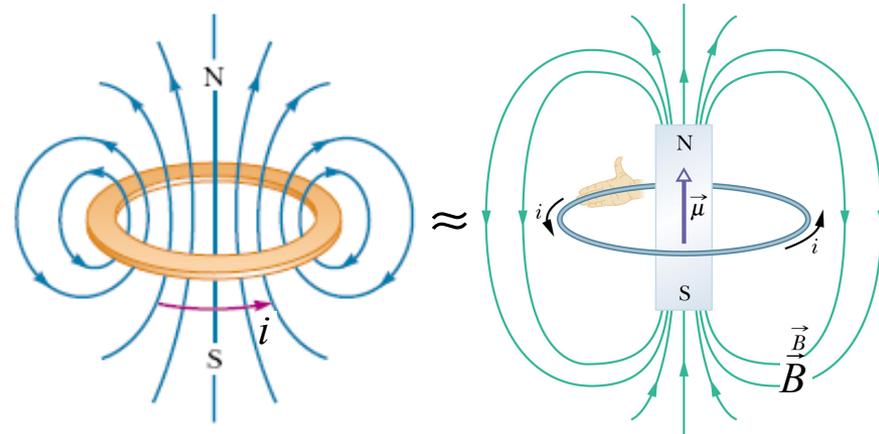
$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Para pontos afastados ( $z \gg R$ ):

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3}$$

Lembrando que  $\pi R^2 = A$  é a área da espira e  $\vec{\mu} = i A \hat{n}$  é o seu momento de dipolo magnético:

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{iA}{z^3} \quad \longrightarrow \quad \vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}$$

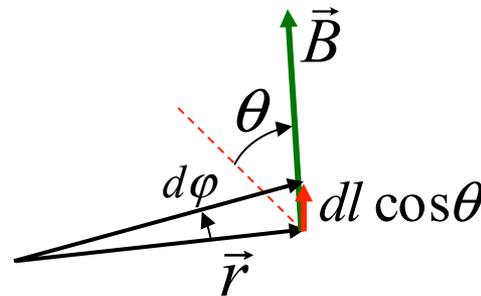
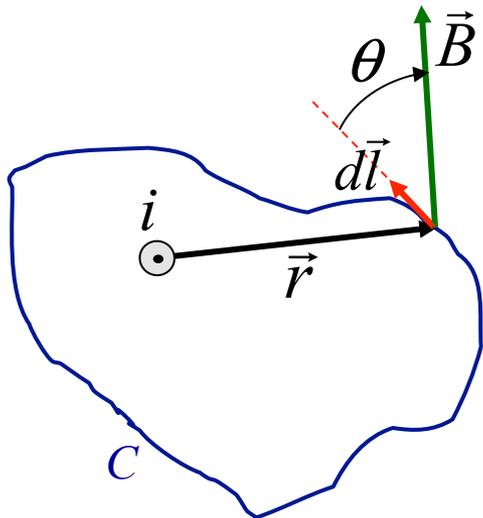


(a bobina se comporta como um ímã – ver semelhança das linhas)

# Circuitação de um campo vetorial

- Cada linha de  $\vec{B}$  é uma *curva fechada*.
- A determinação de  $\vec{B}$  pode ser feita em termos da sua *circuitação*.

Circuitação de  $\vec{B}$  ao longo de um contorno  $C$  :  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$



Intensidade de  $\vec{B}$  :  $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B dl \cos \theta$$

Mas, da figura:  $r d\varphi = dl \cos \theta$

$$\oint_C B dl \cos \theta = \oint_C B r d\varphi = \oint_C \frac{\mu_0 i}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_C d\varphi = \mu_0 i$$

# A lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{env} \quad (\text{lei de Ampère})$$

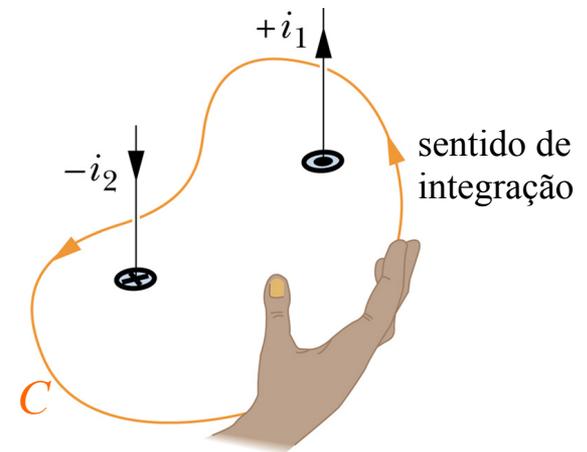
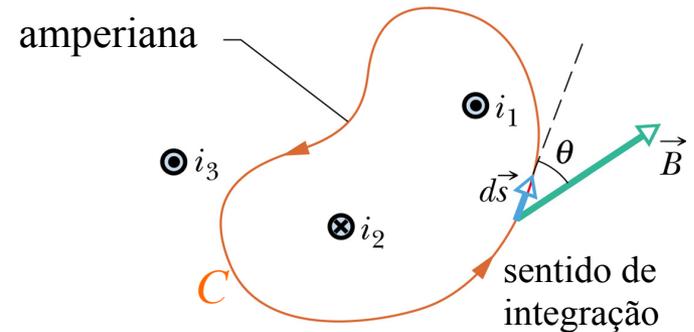
Da figura ao lado tem-se:

$$i_{env} = i_1 - i_2 \Rightarrow \oint_C B dl \cos \theta = \mu_0 (i_1 - i_2)$$

Então:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_1 - i_2)$$

A *lei de Ampère* é geral, mas a sua utilidade no cálculo do campo magnético devido a uma distribuição de correntes depende da *simetria da distribuição*.

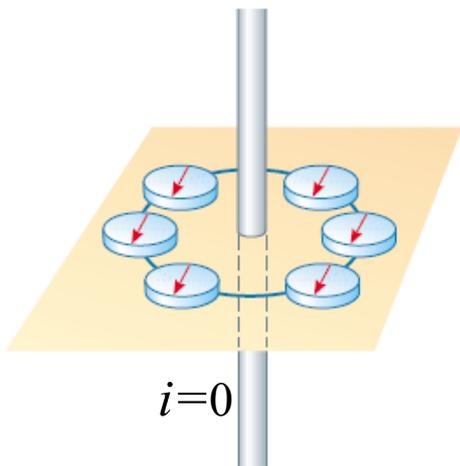
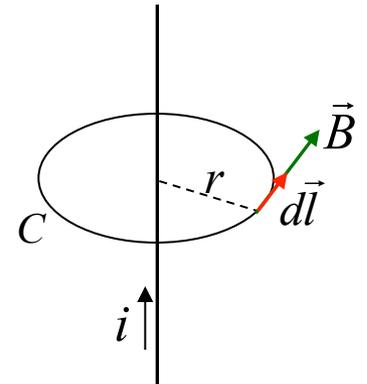


# Campo magnético de um fio infinito

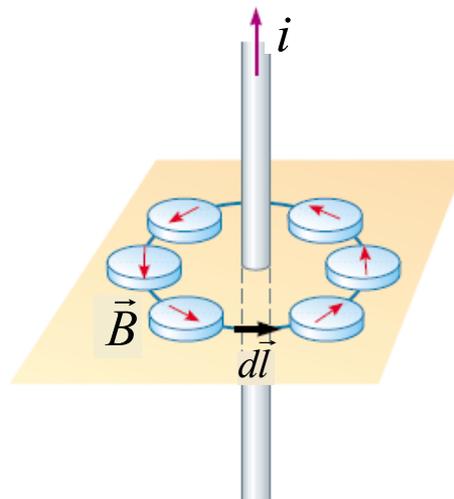
Lei de Ampère:  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$

Em  $C$ ,  $\vec{B}$  é paralelo a  $d\vec{l}$  e  $|\vec{B}| = \text{uniforme} \therefore$

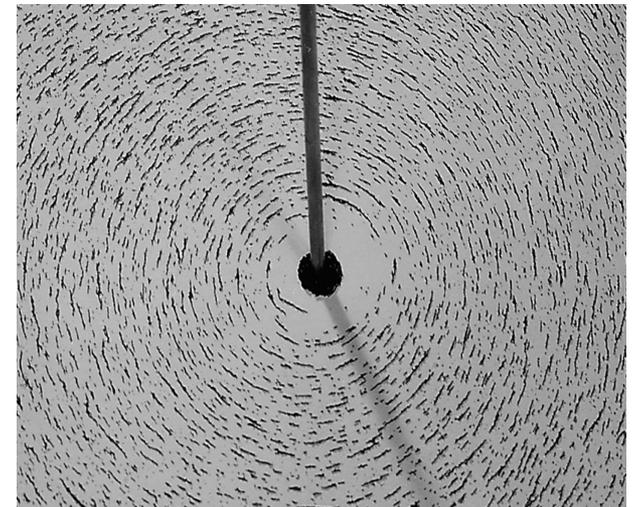
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$



a bússola aponta sempre na mesma direção (norte geográfico)



a bússola aponta na direção de  $\vec{B}$  resultante



limalhas de ferro nas proximidades do fio

# Campo magnético de um fio cilíndrico longo com corrente

$\vec{B}$  possui **simetria cilíndrica** em torno do fio e a **mesma intensidade** em todos os pontos a uma distância  $r$  do centro.

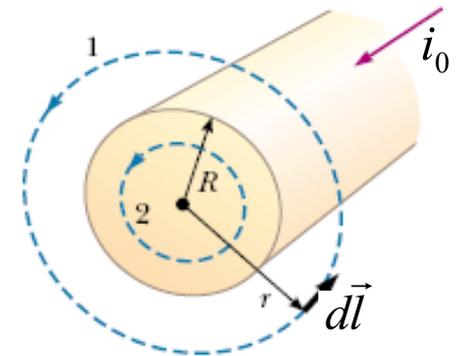
Curva 1 ( $r > R$ ):

$$\oint_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_1 B dl \cos \theta = \mu_0 i_0$$

$\vec{B}$  é paralelo a  $d\vec{l}$   $\longrightarrow \theta = 0^\circ \Rightarrow \cos \theta = 1$

$$\oint_1 B dl \cos \theta = B \oint_1 dl = B \cdot 2\pi r$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i_0 \longrightarrow B = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r} \quad (\text{fora do fio})$$



# Campo magnético de um fio cilíndrico longo com corrente

Curva 2 ( $r < R$ ):

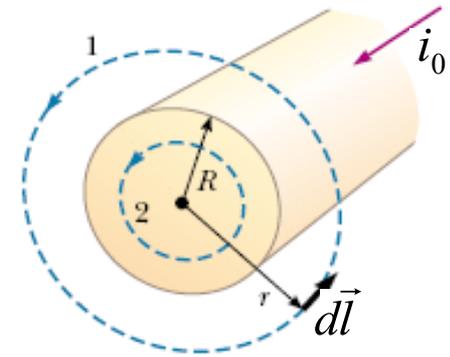
$$\oint_2 B dl \cos\theta = B \oint_2 dl = B \cdot 2\pi r$$

A corrente envolvida pela curva 2 (de raio  $r$ ) é:

$$i_{env} = i_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i_{env} = \mu_0 i_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi R^2} r \quad \text{(dentro do fio)}$$

O sentido de  $\vec{B}$  é dado pela **regra da mão direita**.



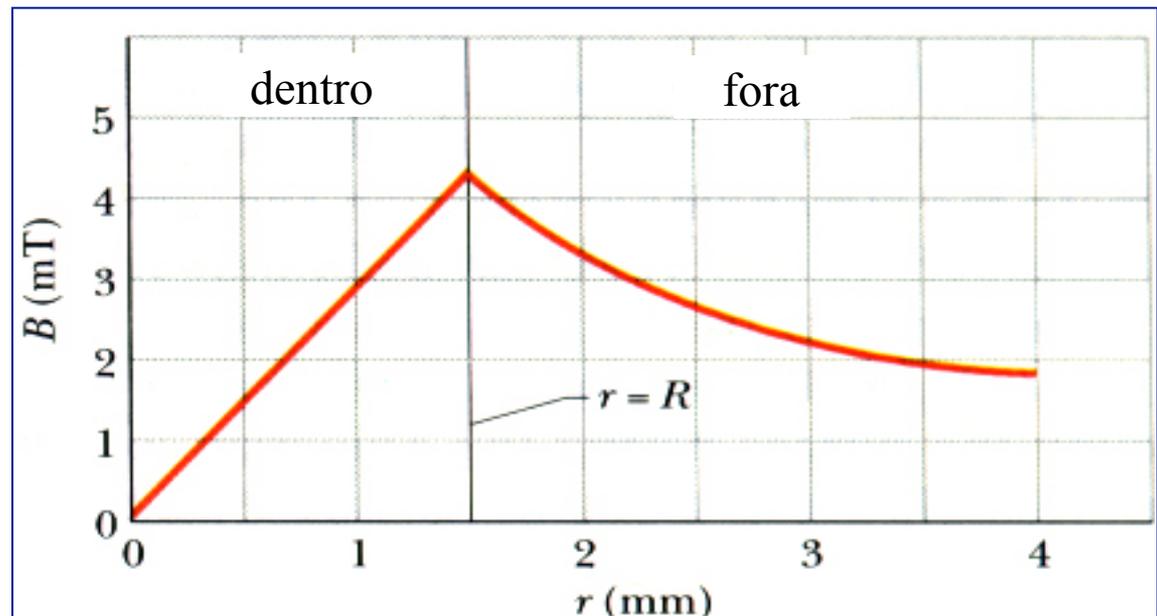
# Gráfico da intensidade de $\vec{B}$ de um fio cilíndrico longo com corrente

- Para  $r \leq R$  :

$$B = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi R^2} r$$

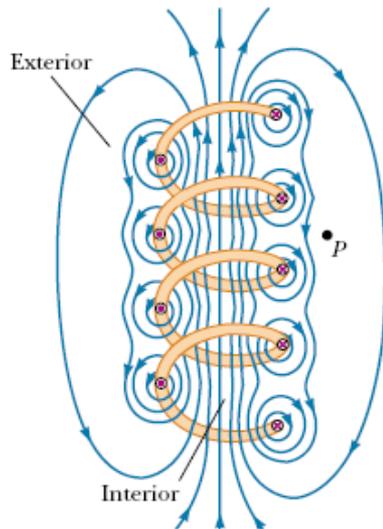
- Para  $r \geq R$  :

$$B = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}$$

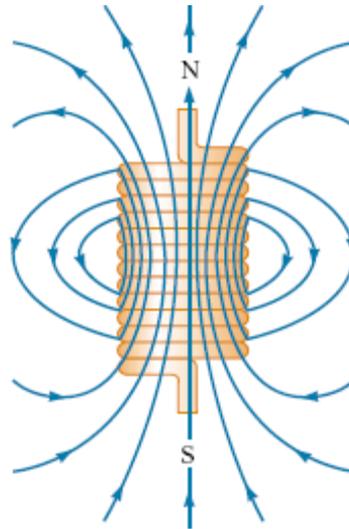


# Solenoides e Toroides

- Um fio longo enrolado **formando uma bobina** em espiral é chamado de **solenóide**.
- O campo magnético do solenoide é a **soma vetorial** dos campos produzidos por **cada uma das voltas** do fio que o forma.

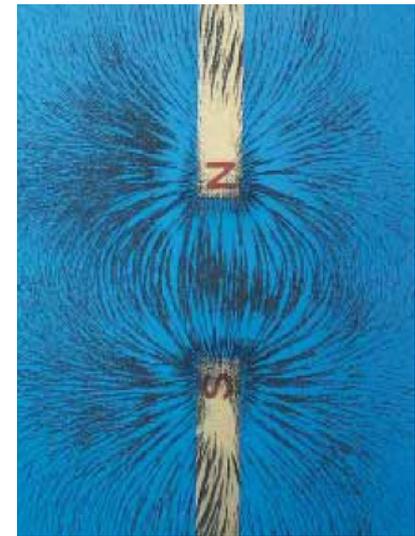


Solenóide esticado



Solenóide compacto

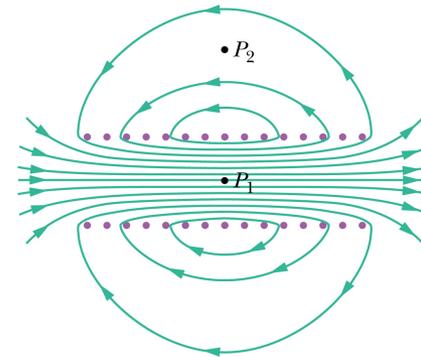
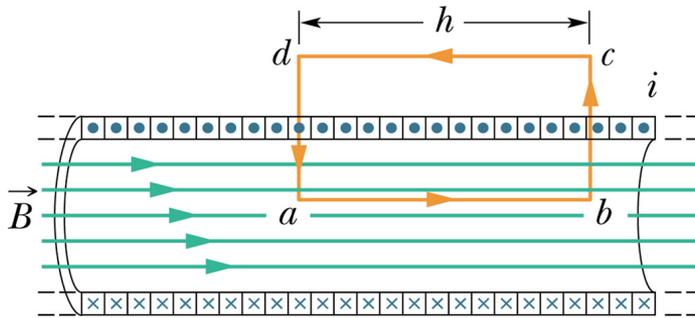
$\approx$



ímã

# Campo de um solenoide

O campo no interior de um solenoide é praticamente uniforme. As figuras abaixo mostram um **solenóide ideal** e um **solenóide real**. Em ambos os casos os **campos fora do solenoide são muito fracos**, em comparação com os do interior.



Aplicando-se a lei de Ampère à curva *abcd*:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bh = \mu_0 i_{env}$$

Havendo  $n$  espiras por unidade comprimento no solenoide:

$$i_{env} = nhi \quad \longrightarrow \quad B = n\mu_0 i$$

# Campo de um toroide

A figura mostra o enrolamento de um toroide de  $N$  voltas, transportando uma corrente  $i$ . O campo  $\vec{B}$  é diferente de zero apenas no interior do toroide. Sua intensidade varia com  $r$ .

Aplicando-se a lei de Ampère para a curva tracejada em azul, tem-se:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i N \qquad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(2\pi r)$$

↓

$$B = \frac{N\mu_0 i}{2\pi r} \quad (\text{toroide})$$

Note que como  $\frac{N}{2\pi r} \approx n$ , esta expressão é parecida à do campo magnético de um “*solenóide enrolado*”.

