Cáp. 32: Magnetismo da Matéria e Equações de Maxwell

Curso de Física III

Profa. Ana Barros

Halliday, Resnick e Walker, Fundamentos da Física – Vol. 3 – 10a edição.

Bibliografia adicional:

a) H. M. Nussenzveig, Curso de Física Básica, Vol. 3

b) R. Serway e J. W. Jewett Jr., Princípios de Física, Vol. 3

c) M. Alonso e E. Finn, Physics

d) F. Zemansky, Eletromagnetismo, Vol.3

e) P. A. Tipler, Física, Vol. 3.

https://sites.ifi.unicamp.br/f328/aulas/

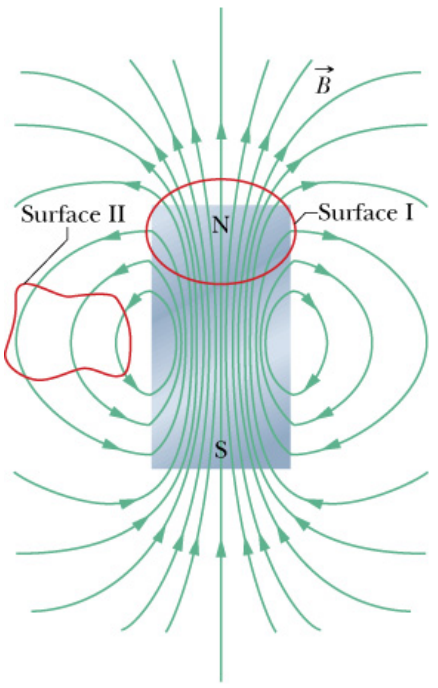
https://eaulas.usp.br/portal/profession.action?profession=F%C3%ADsica

A Lei de Gauss do magnetismo

A lei de Gauss para campos magnéticos é uma maneira formal de se dizer que não existem monopolos magnéticos:

$$\phi_B = \oint \vec{B}.\hat{n}\, dA = 0$$

O fluxo de $\vec{B}$ através de qualquer superfície fechada é nulo, já que não pode existir qualquer "carga magnética" isolada envolvida pela superfície.



Vemos que $\phi_B = 0$ através das superfícies I e II da figura. As linhas de $\vec{B}$ são fechadas.

A lei de Gauss do magnetismo é válida mesmo para estruturas mais complicadas do que um dipolo magnético.

Campos Magnéticos Induzidos

Vimos que um fluxo magnético variável no tempo produz um campo elétrico. Será que um fluxo elétrico variável no tempo pode produzir um campo magnético? A experiência diz que *sim*.

Por analogia com a lei de Faraday reformulada, podemos escrever:

$$\boxed{\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}}$$

(*Lei de Maxwell da indução*)

Consegue-se $\vec{E}$ uniforme variando à taxa constante $\frac{dE}{dt}$ no interior de um capacitor que está sendo carregado com uma corrente constante (figura (a)).

O campo elétrico variável produz um campo magnético dentro e fora da região cilíndrica.

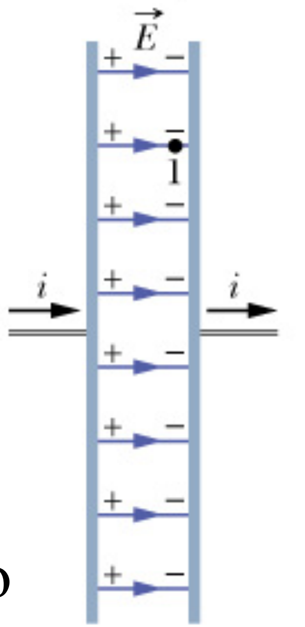


figura (a)

Lei de Ampère-Maxwell

Vê-se que há duas diferenças entre os casos elétrico e magnético: a) no laço de circuitação (figura (b)), o sentido de $\vec{B}$ induzido é oposto ao do campo $\vec{E}$ induzido, razão pela qual não aparece o sinal negativo na equação anterior; b) as constantes μ_0 e ε_0 aparecem por causa da adoção do sistema SI de unidades.

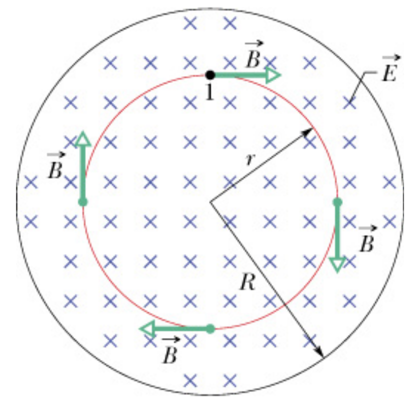


figura (b)

A lei de Ampère-Maxwell

Considerando as duas maneiras de se obter um campo magnético (uma corrente ou um campo $\vec{E}$ variável no tempo), podemos combinar as equações correspondentes em uma só:

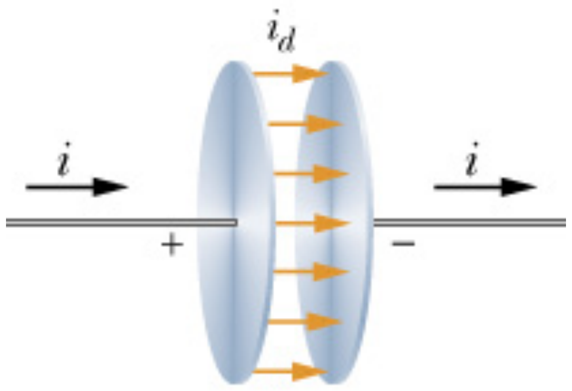
$$\boxed{\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 i_{env}}$$

(Lei de Ampère-Maxwell)

Corrente de Deslocamento

Observamos que o termo $\varepsilon_0 \dfrac{d\phi_E}{dt}$ tem dimensão de corrente e o chamamos de *corrente de deslocamento* (i_d):

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$



Então a lei de Ampère-Maxwell fica:

$$\boxed{\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \left(i_{env} + i_d\right)}$$

Para o caso de um capacitor sendo carregado (figura), mostra-se facilmente que $i_d = i$; então podemos considerar a corrente fictícia i_d como dando continuidade à corrente real i que está carregando o capacitor.

➡ i_d tem significado real?

Campo Magnéticos Induzidos

Calculando o campo magnético induzido

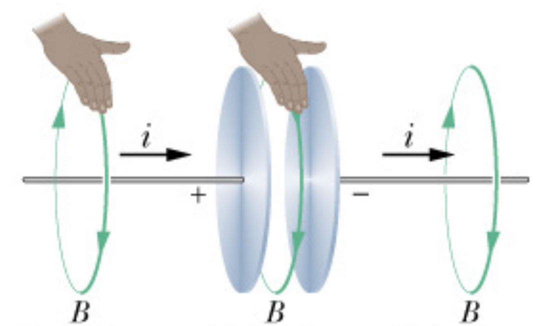
Embora nenhuma carga realmente se mova entre as placas do capacitor sendo carregado, o conceito de corrente de deslocamento pode nos ajudar a calcular o campo magnético induzido.

Como a corrente de deslocamento está uniformemente distribuída entre as placas do capacitor circular de raio R:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2} r \qquad (r < R)$$

E fora do capacitor:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} \qquad (r > R)$$



campo devido à corrente i | campo devido à corrente i_d | campo devido à corrente i

O sentido de $\vec{B}$ está mostrado na figura.

As equações de Maxwell

As equações de Maxwell são equações básicas do eletromagnetismo, capazes de explicar uma grande variedade de fenômenos e são a base do funcionamento de muitos dispositivos eletromagnéticos. São elas:

Forma integral — *Forma diferencial*

$$\oint \vec{E}.\hat{n}\,dA = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0} \;\Longrightarrow\; \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\oint \vec{B}.\hat{n}\,dA = 0 \;\Longrightarrow\; \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \;\Longrightarrow\; \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0\,i_{env} \;\Longrightarrow\; \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

Equações de Maxwell: Forma Integral

As equações de Maxwell descrevem como cargas e correntes dão origem a campos elétricos e magnéticos. Essas equações são dadas, em sua forma integral, por

$$\begin{aligned}
\Phi_E^S \equiv \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} &= \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \quad \text{(Lei de Gauss)} \\
\Phi_B^S \equiv \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} &= 0 \quad \text{(Lei de Gauss, Magnetismo)} \\
\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} &= -\frac{d\Phi_B^C}{dt} \quad \text{(Lei de Faraday)} \\
\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} &= \mu_0 i_{\text{in}} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E^C}{dt} \quad \text{(Lei de Ampere)}
\end{aligned}$$

onde:

S é uma superfície fechada,
$d\vec{S}$ é um vetor perpendicular a S;
C é uma curva fechada,
$d\vec{l}$ é um vetor paralelo (tangencial) a C;
$\vec{E}$ é o campo elétrico;
$\vec{B}$ é o campo magnético;
Φ_E^S é o fluxo elétrico que atravessa S;
Φ_B^S é o fluxo magnético que atravessa S;
q_{in} é a carga elétrica dentro de S;
$i_{\text{in}} = dq/dt$ é a corrente elétrica que atravessa C;
Φ_E^C é o fluxo elétrico na superfície *aberta* apoiada em C;
Φ_B^C é o fluxo magnético na superfície *aberta* apoiada em C;
$\epsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ C^2/Nm^2 é a permissividade elétrica no vácuo;
$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7} = 1.26\times10^{-6}$ T.m/A é a permeabilidade magnética no vácuo.

Operadores Diferenciais

Definindo um operador diferencial $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

visualizado como um vetor comum, e usando operações de cálculo vetorial, como produto escalar e produto vetorial, podemos definir operadores convenientes para cálculos eletromagnéticos.

Gradiente

Seja ϕ um campo escalar. Seu gradiente é um vetor, denotado por $\vec{\nabla}\phi$, e definido por

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

Divergente

Seja $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ um campo vetorial. Seu divergente é um escalar, denotado por $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ e definido por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Rotacional

Seja $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ um campo vetorial. Seu rotacional é um vetor, denotado por $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ e definido por

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

Laplaciano

Seja ϕ um campo escalar. Seu Laplaciano é um escalar, denotado por $\nabla^2\phi$ e definido como $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi$, i.e. o divergente do gradiente de ϕ:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Teorema de Gauss

Esses resultados podem ser generalizados para integrais de superfície e de volume pelos teoremas de Stokes e Gauss, respectivamente.

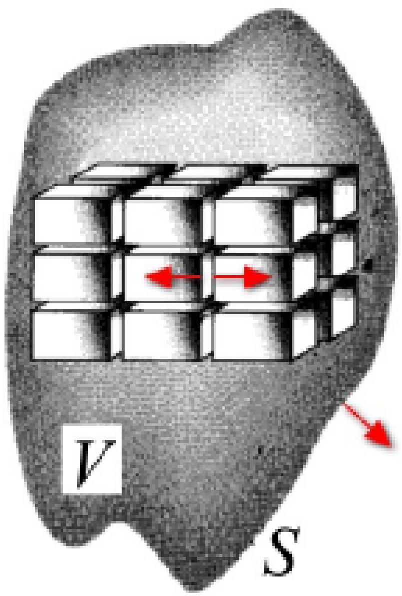


Figura 10.6: Teorema de Gauss. Um volume qualquer preenchido com cubos. Após cancelamentos internos, somente a contribuição do fluxo na superfície externa sobrevive. (Griffiths)

O Teorema de Gauss diz que a integral tripla do divergente de $\vec{E}$ no volume V definido pela superfície S é a integral de superfície de $\vec{E}$ na superfície S:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \; dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{(Teorema de Gauss)} \tag{10.32}$$

Para mostrar o teorema de Gauss, nós imaginamos o volume arbitrário subdividido em cubos infinitesimais, como na Fig 10.6. A integral no volume é obtida somando as contribuições dos vários cubos, cada uma das quais é dada pela Eq. 10.25:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \; dV = \sum_{\Delta v \to 0} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \; \Delta v_{\text{cubo}} = \sum \Phi_E^{\text{cubos}} \tag{10.33}$$

Na soma dos fluxos nos cubos, as contribuições de superfícies internas se cancelam, pois vem sempre em pares de sinais opostos. Sobra apenas a contribuição das faces externas:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \; dV = \sum \Phi_E^{\text{cubos}} = \sum \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes diz que a integral dupla do rotacional de um campo vetorial $\vec{E}$ na superfície aberta S definida pela curva fechada C é a integral de linha de $\vec{E}$ na curva C:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{(Teorema de Stokes)} \tag{10.34}$$

Para mostrar o teorema de Stokes, nós imaginamos a superfície arbitrária subdividida em circuitos infinitesimais, como na Fig 10.7. A integral na superficie é obtida somando as contribuições dos vários circuitos quadrados, cada uma dada pela Eq. 10.27:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{\Delta S \to 0} \vec{\nabla} \times \vec{E}\ \Delta S_{\text{quadrado}} = \sum C_E^{\text{quadrados}} \tag{10.35}$$

Na soma das circulações dos quadrados, as contribuições de lados internos se cancelam, pois vem sempre em pares de sinais opostos. Sobra apenas a contribuição da curva externa delimitando a superfície:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum C_E^{\text{quadrados}} = \sum \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A Equação de uma Onda Eletromagnética

Vamos deduzir uma equação diferencial cujas soluções descrevem uma onda eletromagnética e descobrir a sua velocidade de propagação no vácuo. Consideremos as equações de Maxwell com $\rho = J = 0$.
Tomando-se o rotacional de (3) e utilizando (1) :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Mas: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$

E como $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \qquad (5)$$

Analogamente, tomando-se o rotacional de (4) e utilizando (2) :

$$\boxed{\nabla^2\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}} \qquad (6)$$

As equações (5) e (6) equivalem a seis equações diferenciais escalares (uma para cada componente de $\vec{E}$ e $\vec{B}$) formalmente idênticas.

A Equação de uma Onda Eletromagnética

Para simplificar, consideremos que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estejam nas direções y e z, respectivamente e ainda que $E_y = E_y(x,t)$ e $B_z = B_z(x,t)$ somente. Então, as equações (5) e (6) se simplificam para:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \qquad (7)$$

Cada uma destas equações é formalmente idêntica à equação:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \ ,$$

que representa uma onda oscilando na direção y e propagando-se na direção x com velocidade v . Então, as equações (7) acima representam uma onda que se propaga na direção x com velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cong 3{,}0 \times 10^8 \frac{m}{s} = \mathrm{c}$$

A Equação de uma Onda Eletromagnética

Ou seja, uma onda *EM* se propaga no vácuo *com velocidade da luz.*
A equação de onda para um escalar ψ qualquer (representando qualquer componente de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$) é:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,}$$

cuja solução mais geral para propagação numa direção genérica do espaço é do tipo:

$$\boxed{\psi = \psi_m \mathrm{e}^{i(\vec{k}.\vec{r} \pm \omega t)}} \quad , \text{ com } \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Para uma onda propagando-se na direção x:

$$\boxed{\psi = \psi_m \operatorname{sen}(k\,x \pm \omega t)}$$

Exemplos

http://www.walter-fendt.de/ph11e/emwave.htm

(uma onda eletromagnética)

http://people.seas.harvard.edu/~jones/ap216/applets/emWave/emWave.html

(a propagação de uma onda eletromagnética)