Tratamento de Erros Experimentais
Física Experimental IV

Profa. Ana Barros
CEFET-RJ

Coordenadora dos Laboratórios de Física

Informações Gerais

- No final de cada experiência o aluno deverá fazer um relatório de cada prática, além de responder ao respectivo questionário;

- Uma das notas dos relatórios (a mais baixa) será eliminada;

- O número máximo de faltas de 25%, ou seja 2 faltas em todo o período;

- A reposição das aulas é possível, somente com a concordância do professor;

- O atraso tolerado em cada aula é de 15 minutos;

- Os grupos deverão ser formados até a 2ª aula mantendo-se até o final do curso.

- Atenção: Será realizado no final do curso uma avaliação onde cada grupo deverá escolher um experimento e apresentá-lo oralmente, com o tema escolhido.

Física Experimental IV -

Análise de Erros e dos Dados Experimentais

Revisão de Circuitos Elétricos e Aparelhos de Medida

Elementos Lineares e Nâo Lineares

Gerador + Osciloscópio Parte 1

Gerador + Osciloscópio Parte2

Circuito RLC

Campo Elétrico: Superfícies Equipotencias

Detecção do Campo Magnético

LASER PARTE 1

LASER PARTE 2

LASER PARTE 3

RELATÓRIO FINAL - PROJETOS

Guia para Física Experimental
Caderno de Laboratório, Gráficos e Erros

- **A finalidade é de informar alguns procedimentos numéricos que serão adotados ao longo do** curso, no que diz respeito ao tratamento de dados experimentais. Serão abordados sucintamente a propagação de erros, o método dos mínimos quadrados e confecção de gráficos.

Física Experimental IV- Tratamento de dados Experimentais

- Descreveremos uma visão dos conceitos experimentais de medida e método científico.
- Iremos discutir e apresentar o procedimento experimental de medida, bem como a apresentação dos resultados, introduzindo o conceito de incerteza.
- Além disso, desejamos apresentar os vários tipos de incertezas com os quais nos depararemos no decorrer do curso e quais serão os procedimentos adotados para o tratamento dos dados obtidos.

Física Experimental IV- Tratamento de dados Experimentais

- ***Foi Galileu o*** precursor do que hoje é conhecido como método científico para o estudo da natureza.

- Dentro da concepção atual de ciência, o primeiro problema com o qual nos deparamos quando pretendemos descrever a natureza é a realização de observações experimentais, que chamamos **medidas.**

- Como podemos comunicar de maneira clara, de forma que sejam compreensíveis e reprodutíveis por outros experimentadores as medidas obtidas??

Tipos de incertezas

- ***1 - Incerteza do instrumento:*** a incerteza da instrumento corresponde à precisão com a qual a grandeza observada pode ser comparada com um padrão no SI, ela depende do instrumento.

Usaremos a seguinte regra: se o instrumento utilizado na medida possuir uma escala, uma régua, por exemplo, a incerteza dele é o valor da **menor divisão de sua escala dividido por 2**.

Se o instrumento for digital, um cronômetro por exemplo, a incerteza é o **menor valor** que pode ser lido no mostrador do instrumento.

Tipos de incertezas

- ***2 - Incerteza aleatória:*** chamamos de grandeza experimental toda grandeza cujo valor é obtido por medidas. Não conhecemos exatamente seu valor, tudo que podemos fazer é estimá-lo. Se repetirmos um número enorme de vezes as medidas esperamos que nossos resultados coincidam com o valor verdadeiro da grandeza observada. Acontece que a repetição de uma experiência em condições idênticas não fornece resultados idênticos. Chamamos essas diferenças de flutuações estatísticas nos resultados. Essas flutuações constituem a essência da incerteza aleatória e apresentaremos na próxima seção um modo de quantificá-la.

Tipos de Incertezas

3 - Incerteza sistemática: as incertezas sistemáticas aparecem quando usamos aparelhos de medida com calibração ruim.
EXEMPLO 1: Uma balança que indica um valor de massa diferente de zero quando não há nenhum objeto sobre seu prato de medida,

EXEMPLO 2: Um procedimento experimental realizado sem a devida atenção, como por exemplo, a medida do comprimento de uma mesa usando uma régua começando da marcação de 1cm.
Esses erros são erros grosseiros e devemos estar atentos quanto à calibração dos instrumentos de medida e aos procedimentos experimentais utilizados, de modo a evitá-los.

Incertezas e Propagação de erros:

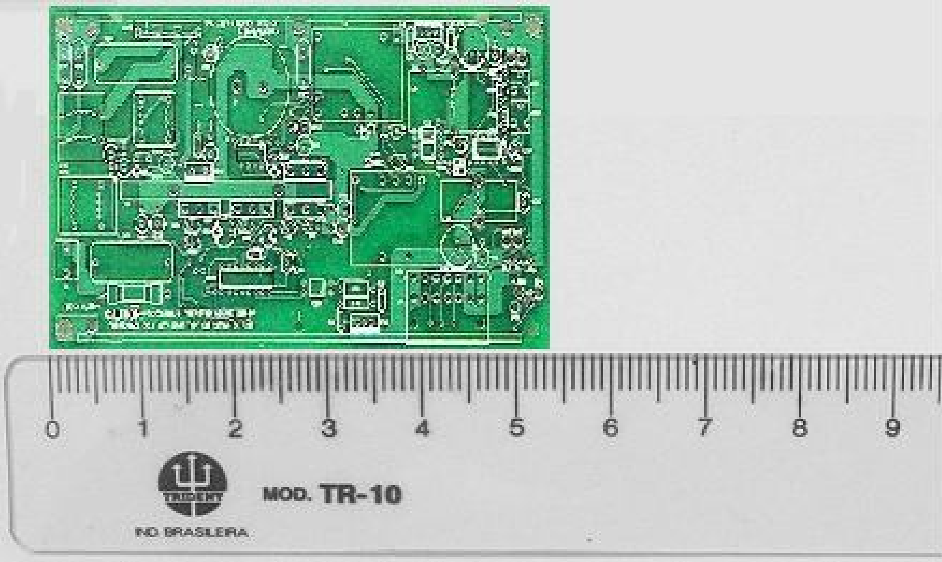
- Essencialmente, existem dois tipos de medidas que podemos fazer: ***medidas diretas*** cujo resultado é obtido diretamente pela leitura do painel de um intrumento de medida; e ***medidas indiretas*** cujo valor é obtido pela operação de grandezas que são medidas diretamente e, portanto, possuem incertezas associadas a elas.

Medidas Diretas:

- O procedimento que adotamos para fazer o registro correto de uma medida direta, então, é o seguinte: registramos todos os algarismos fornecidos pela escala do instrumento e acrescentamos um outro algarismo resultante da escala que criamos.

- O conjunto formado por esses algarismos chama-se "algarismos significativos da medida" e são esses algarismos que utilizamos para registrar qualquer medida. A incerteza desse nosso registro será a menor divisão da escala que fabricamos.

Exemplo



- Por exemplo, uma régua milimetrada, em condições boas de medida, podemos, no máximo, subdividir o milímetro em duas partes, e uma leitura de um dado comprimento poderia ser escrito, por exemplo, como (5,30 ± 0,05)cm se o comprimento estiver mais próximo do traço do milímetro ou (5,35 ± 0,05)cm se o comprimento estiver entre dois traços de milímetro.

- Esse critério vai sempre depender das condições da medida. Sob condições não muito boas, deveríamos registrar para essa medida o valor (5,3 ± 0,1)cm.

- Portanto, como dissemos, o registro correto da medida envolve a indicação de três informações, como apresentamos no exemplo acima, ou seja:

$$L = (5,35 \pm 0,05)\text{cm}$$

Medida Indireta

- Uma medida é dita indireta quando ela resulta da operação de duas ou mais grandezas, cada uma delas medidas com um certo grau de incerteza.

Dizemos que o erro cometido em cada uma das grandezas medidas diretamente se propaga para o resultado final.

- ***O modelo que governa as medidas que iremos realizar em nosso curso é a chamada*** estatística de Gauss ou Gaussiana

Medida Indireta (cont..)

O resultado analítico do tratamento estatístico, utilizando a estatística Gaussiana, na determinação do valor de uma grandeza y = f(x1, x2, ... , xn) onde y é uma grandeza experimental que é definida em função de grandezas x1, x2, etc. que são medidas diretamente e, portanto, possuem incertezas associadas a elas, nos diz que a incerteza de y é dada por:

$$\delta^2 y = \sum_{x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \delta^2 x_i$$

onde consideramos que as variáveis xi são medidas independentemente umas das outras. Nessa expressão as derivadas que aparecem significam que devemos derivar a função em relação a cada uma das variáveis considerando todas as outras variáveis como constantes.

Exemplo: Medida da Resistência Elétrica de Um Condutor

Valores Medidos experimentalmente: $V = (V_0 \pm \delta V)$ e $I = (I_0 \pm \delta I)$.

A resistência R será dada por: $R = V_0/I_0$ Logo,

$$\delta^2 R = \left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 \delta^2 V + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \delta^2 I = \left(\frac{1}{I_0}\right)^2 \delta^2 V + \left(-\frac{V_0}{I_0^2}\right)^2 \delta^2 I$$

A incerteza de R será dada pela raiz quadrada da expressão acima.

Exemplo: Medida da Resistência Elétrica de Um Condutor

A expressão para a resistência R também pode ser fatorada no lado direito da expressão:

$$\delta^2 R = \left(\frac{V_0}{I_0}\right)^2 \left[\left(\frac{\delta V}{V_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I_0}\right)^2\right] = R^2 \left[\left(\frac{\delta V}{V_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I_0}\right)^2\right]$$

Generalização

- No caso de várias variáveis $y = x_1.x_2/(x_3.x_4)$ podemos fazer uma generalização:

$$\left(\frac{\delta y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_2}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_3}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_4}{x_4}\right)^2$$

Quando y(x1, x2, ... ,xn) é formada apenas por produtos e quocientes, não importando o número de variáveis xi, essa expressão nos diz que o quadrado do er*ro relativo da função é igual a soma dos quadrados dos erros relativos das variáveis.*

Física Experimental IV - Profa Ana Barros

Registro Correto de uma Medida
Exemplo

Se o valor da voltagem for: $V = (5,74 \pm 0,01)$ V

e a corrente i for: $i = (0,82 \pm 0,01)$mA.

Qual será o valor da resistência com o respectivo erro experimental?

$$R = (6833,3 \pm 0,1)\ \Omega$$

MUITO CUIDADO COM AS UNIDADES!!!!

Erros Aleatórios e Sistemáticos

- Em ciência e tecnologia, é fundamental a realização de medidas de grandezas físicas.

- Estas grandezas podem ser, por exemplo, comprimentos, intervalos de tempo, voltagem entre dois pontos, carga elétrica transportada, intensidade luminosa, e muitas outras.

- As **fontes de erro** fazem com que toda medida realizada, por mais cuidadosa que seja, esteja afetada por um **erro experimental**. Os **erros experimentais** podem ser classificados em dois grandes grupos: **erros sistemáticos** e **erros aleatórios**.

Causas de Erros Sistemáticos

- **Ao instrumento que foi utilizado:** por exemplo, erros causados em medidas de intervalos de tempo feitas com um relógio que atrasa;

- **Ao método de observação utilizado:** por exemplo, medir o instante de ocorrência de um relâmpago pelo ruído do trovão associado;

- **A efeitos ambientais:** por exemplo, a medida de freqüência da luz emitida por um laser, que pode depender ligeiramente da temperatura ambiente.

Erros Aleatórios

- Os **erros aleatórios** são flutuações, para cima ou para baixo, que fazem com que aproximadamente a metade das medidas realizadas de uma mesma grandeza numa mesma situação experimental esteja desviada para mais, e a outra metade esteja desviada para menos.

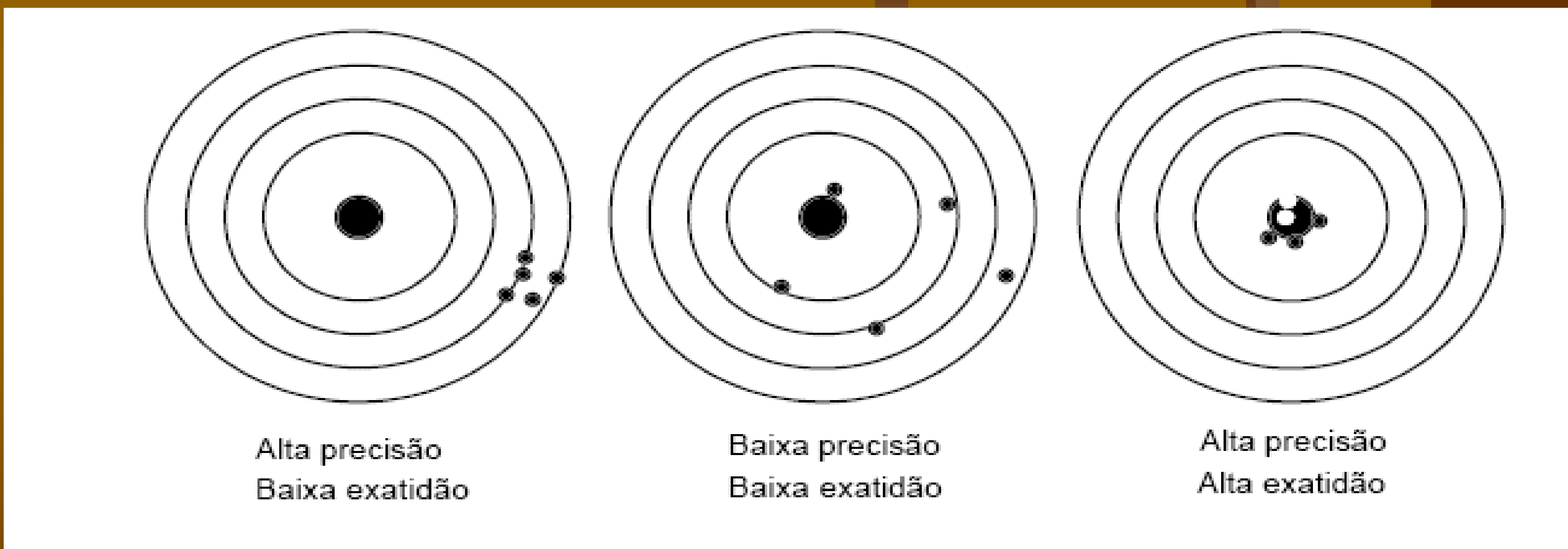
- Os **erros aleatórios** afetam a **precisão** (" precision") da medida. Nem sempre se pode identificar as **fontes de erros aleatórios**.

Algumas **fontes típicas de erros aleatórios** são:

- **Método de observação:** erros devidos ao julgamento feito pelo observador ao fazer uma leitura abaixo da menor divisão de uma escala, como por exemplo, medir o comprimento de uma folha de papel com uma régua cuja menor divisão é 1 mm com precisão na medida de 0,5 mm;

- **Flutuações ambientais:** mudanças não previsíveis na temperatura, voltagem da linha, correntes de ar, vibrações (por exemplo causadas por passagem de pessoas perto do aparato experimental ou veículos nas vizinhanças).

Erros aleatórios podem ser tratados quantitativamente através de métodos estatísticos, de maneira que seus efeitos na grandeza física medida podem ser, em geral, determinados.



Tratamento estatístico de medidas com erros aleatórios

Estimativa do valor correto da grandeza medida

Como os erros aleatórios tendem a desviar aleatoriamente as medidas feitas, se forem realizadas muitas medições aproximadamente a metade das medidas feitas estará acima e metade estará abaixo do valor correto. Por isso, uma boa estimativa para o valor correto da grandeza será a média aritmética dos valores medidos:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ ,$$

onde *xi* é o resultado da *i*-ésima medida e *N* é o número total de medidas feitas.

Dispersão das medidas e precisão da estimativa

Quantitativamente a dispersão do conjunto de medidas realizadas pode ser caracterizada pelo **desvio padrão** do conjunto de medidas, definido como

$$\Delta x = S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \; .$$

Erro Padrão da Média

À medida que se realiza mais medidas, a compensação dos erros aleatórios entre si vai melhorando e a média do conjunto de medidas, x , vai se tornando uma grandeza mais precisa.

O erro padrão da média é definido como:

$$\Delta\bar{x} = S_m = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Erro Percentual ou Relativo

É o erro que afeta a grandeza medida expresso como porcentagem do valor medido da grandeza. Portanto, o erro relativo percentual numa medida, x , com erro absoluto Δx será dado por:

$$(\Delta\bar{x})_r = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \times 100\ \%$$

Média, Desvio e Erro Padrão

O resultado de uma medição está sujeito a erros aleatórios que fazem com que medidas em "idênticas condições" dêem valores diferentes. Se temos N medidas de uma grandeza física, $x_1, x_2, \ldots, x_N$, definimos a média, o desvio padrão ("standard deviation") e o erro padrão ("standard error") desse conjunto de medidas como na Tabela 4.1, abaixo:

Nome	Símbolo e fórmula	Nome por extenso
média	$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$	média aritmética
desvio padrão	$\Delta x = S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}$	desvio padrão de cada medida
erro padrão	$\Delta \bar{x} = S_m = \frac{S}{\sqrt{N}}$	desvio padrão da média

Tabela 4.1. *Definições básicas. O símbolo de somatória indica a soma de todos os termos com $i = 1,\ldots,N$. O nome por extenso se utiliza nos casos em que o nome indicado na primeira coluna pode gerar confusão.*

Método dos Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados é um método estatístico que nos diz que a função que melhor descreve uma amostragem experimental é aquela cujos parâmetros que a definem minimizam a soma dos quadradosdos desvios.

No nosso caso, o utilizaremos apenas para a determinação dos coeficientes de um polinômio de primeiro grau (reta) **y = a + bx**, onde **a é o chamado de coeficiente linear** e **b o coeficiente angular**.

Método dos Mínimos Quadrados

Os coeficientes da reta podem ser calculados manualmente (ou por computador) utilizando-se as seguintes fórmulas:

$$b = \frac{n\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{e} \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

onde a barra em cima dos símbolos representa o valor médio da variável.

As incertezas de **a** e **b** podem ser calculadas utilizando-se a fórmula de propagação de erros (o erro médio) apresentada mais acima. Os valores das incertezas são dadas por

$$\delta^2 b = \frac{\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{e} \qquad \delta^2 a = \frac{\sum x_i^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\sigma^2$$

Nessa expressão, σ^2 é chamado de variança da medida e n o número de pontos da medida. O desvio-padrão é a raiz quadrada da variança, ou seja, σ. A expressão para σ^2 é dada por

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_i [y_i - y(x_i)]^2 = \frac{1}{n-2}\sum_i (y_i - a - bx_i)^2 .$$

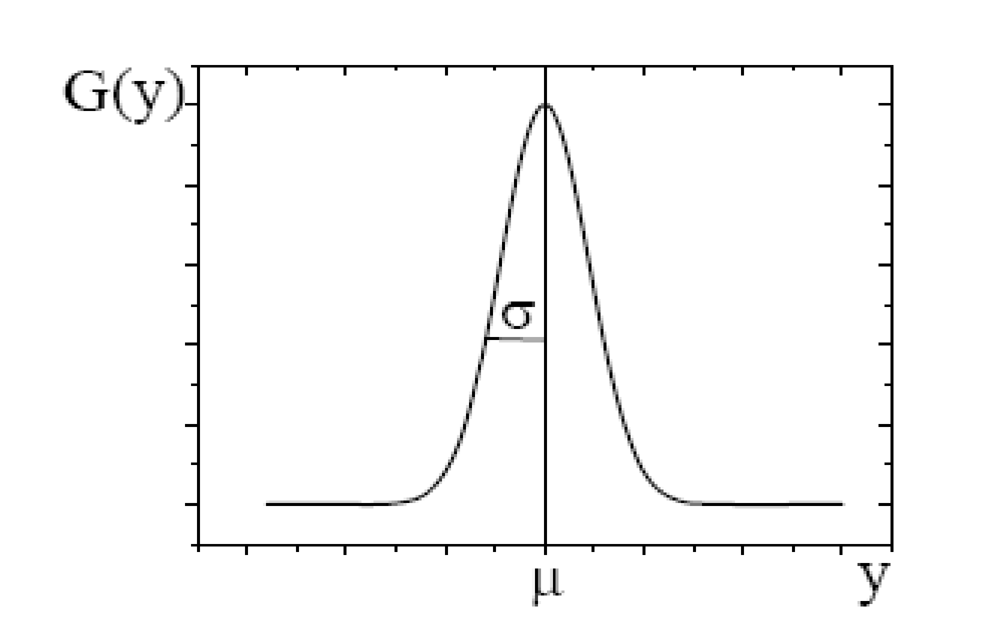
nessa expressão, a e b representam os coeficientes da melhor reta obtida pelo método dos mínimos quadrados, $y(x_i)$ é o valor dessa melhor reta calculado para $x = x_i$, e y_i é o valor que medimos no ponto x_i.

Tratamento de Dados

Para avaliarmos o valor do erro estatístico em nossos resultados experimentais adotaremos o seguinte procedimento:

- Vamos repetir a medida várias vezes, os valores encontrados, por exemplo, medida do período de oscilação do pêndulo simples, estarão distribuídos aleatoriamente em torno do valor médio.
- Para um número grande de medidas definiremos o valor verdadeiro como sendo o valor médio dos resultados obtidos.
- Em geral, a distribuição estatística dos resultados pode ser representados por uma função Gaussiana, como a mostrada na próxima transparência.

Tratamento de Dados



y - Valores medidos da grandeza observada.

G(y) – Função de distribuição dos valores observados. Corresponde à densidade de probabilidade de observação de uma medida com valor **y**.

$\boldsymbol{\sigma^2}$ – Variância da distribuição dos valores observados.

σ – Desvio padrão da distribuição de valores observados.

A função de distribuição pode ser escrita como:

$$G(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(y-\mu)/\sigma\right]^2\right\}. \qquad (1)$$

Propagação de Incertezas

Função	Incerteza
$W(x,y) = x + y$	$\sigma_W^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$W(x,y) = x - y$	$\sigma_W^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$W(x,y) = a\,x + b\,y$, (a, b constantes)	$\sigma_W^2 = (a\,\sigma_x)^2 + (b\,\sigma_y)^2$
$W(x,y) = x\,y$	$\left(\frac{\sigma_W}{W}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$W(x,y) = \frac{x}{y}$	$\left(\frac{\sigma_W}{W}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$W(x) = x^2$	$\sigma_W^2 = (2\,x\,\sigma_x)^2$

No Laboratório

O primeiro passo são as ANOTAÇÕES

- Nele **cada estudante deverá manter um Caderno de Laboratório ou na própria folha do roteiro experimental, no qual anotará os dados**, procedimentos e demais informações relevantes à realização de cada experiência.

- As anotações devem ser feitas durante a realização do experimento para garantir a objetividade e a fidelidade.

Roteiro Experimental **dos Procedimentos**

1 - Título do experimento, data de realização e grupo;

2 - Objetivos do experimento;

3 - Roteiro dos procedimentos experimentais;

4 - Descrição dos principais instrumentos;

5 - Dados medidos com os respectivos erros experimentais;

6 – Cálculos;

7 – Gráficos;

8 - Resultados e Conclusões.

Roteiro para Obtenção de um Bom Gráfico

- Gráficos são uma das principais maneiras de se apresentar e analisar dados em ciência e tecnologia.
- Devem ser claros e conter um título, eixos, escalas, unidades e barras de erro.
- Escolha a área do papel com o tamanho adequado;
- Desenhe os eixos claramente: a variável dependente deve estar sempre no eixo vertical (y) e a variável independente no eixo horizontal (x);

Exemplos

- Por exemplo, se seus dados descrevem o movimento de

  queda livre de uma partícula,você pode representar

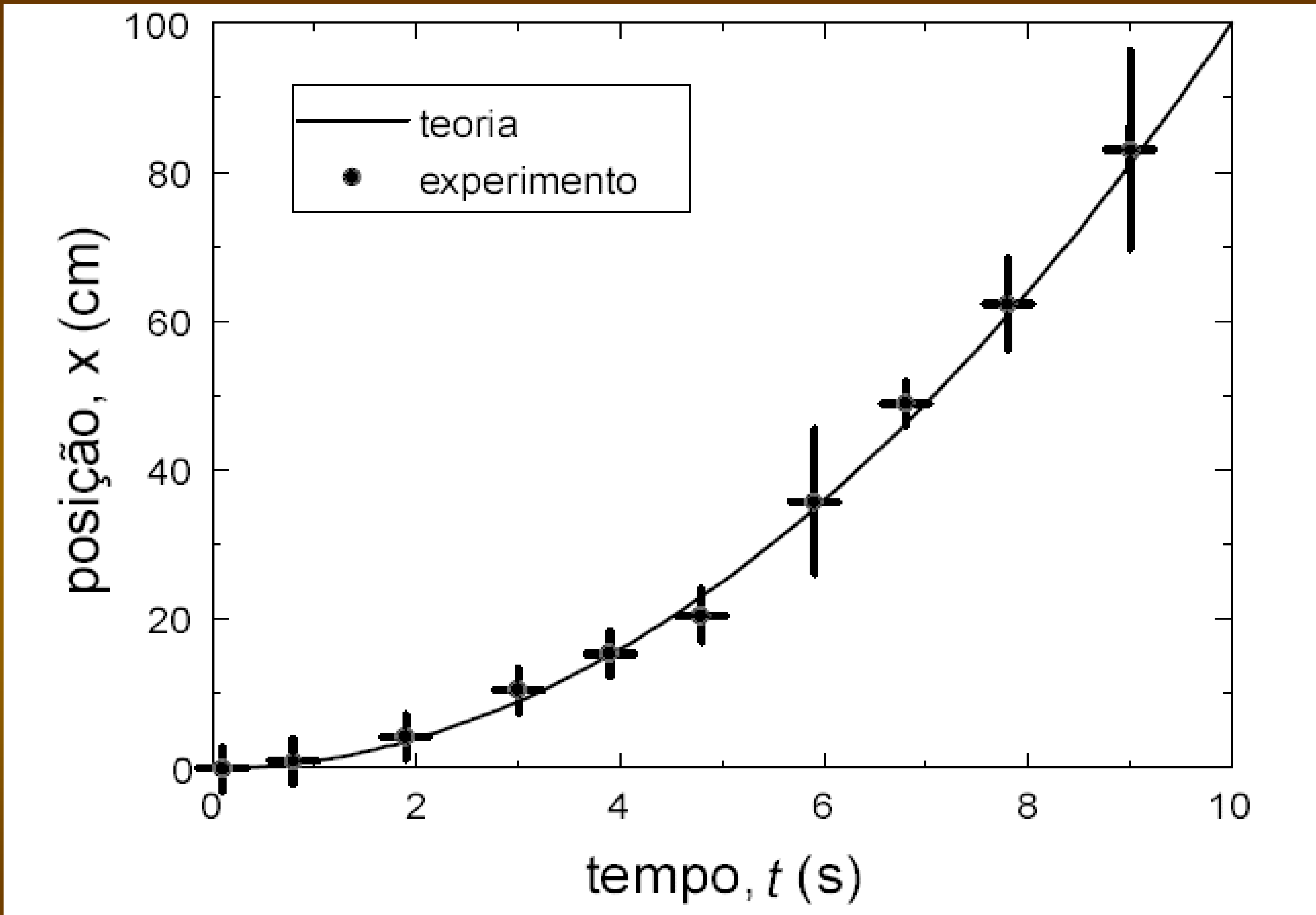
  $x(t)$ se quer mostrar visualmente que o movimento é

  parabólico,
  Mas se quiser determinar a aceleração da gravidade é mais

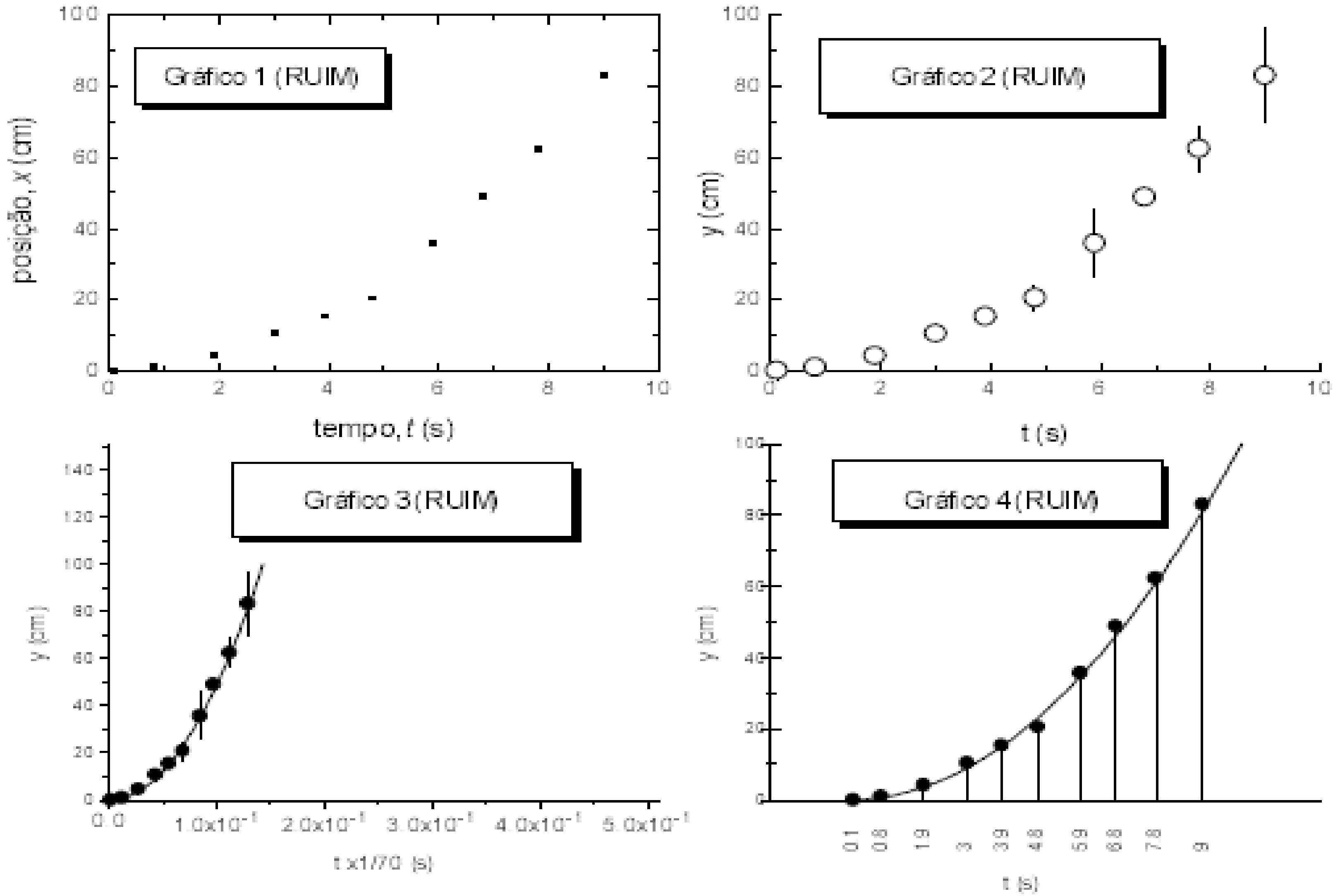
  conveniente representar $x(t2)$ já que aceleração pode

  ser extraída da inclinação desta reta.

- O guia para as outras escolhas deve **ser sempre o conceito de que um gráfico é uma ajuda visual para a sua argumentação e para** que o leitor entenda rapidamente as evidências experimentais.


teoria
experimento
posição, x (cm)
tempo, t (s)
0
20
40
60
80
100
0
2
4
6
8
10

Gráficos Mal Feitos



Método Gráfico

Descrevemos a seguir um método rápido para estimar os parâmetros de uma reta,aconselhável quando não dispõe de um computador com software adequado para cálculos estatísticos (como, por exemplo, nas provas!).

As únicas ferramentas necessárias são um lápis (ou caneta) e uma régua (de preferência transparente).

Método Gráfico

1. Estime o centro de gravidade dos pontos (x,y). As retas vertical e horizontal que passam por este ponto divide o gráfico em quatro quadrantes.

2. Coloque a ponta do lápis no ponto (x,y) e apoie a régua no lápis.

3. Gire a régua em torno do ponto (x,y) até que 50% dos pontos **de cada quadrante** estejam por cima, e 50% por abaixo da régua. (Note que mais de uma reta satisfazem esta condição e você deve escolher uma média.)

Trace a **reta média**. A equação desta reta será

$$y = a\,x + b.$$

Método Gráfico

4. Apoie novamente a régua no lápis e gire-a em torno do ponto (x,y) até deixar, aproximadamente, 16% dos pontos de cada quadrante abaixo e 84 % acima da régua.
Aequação desta reta é $y = y + amin\ (x-x)$.
A inclinação desta reta representa a **inclinação mínima**, *amin*, dentro de um desvio padrão.
Prolongando esta reta até cortar o eixo $x = 0$, o ponto de interseção determina *bmax*.

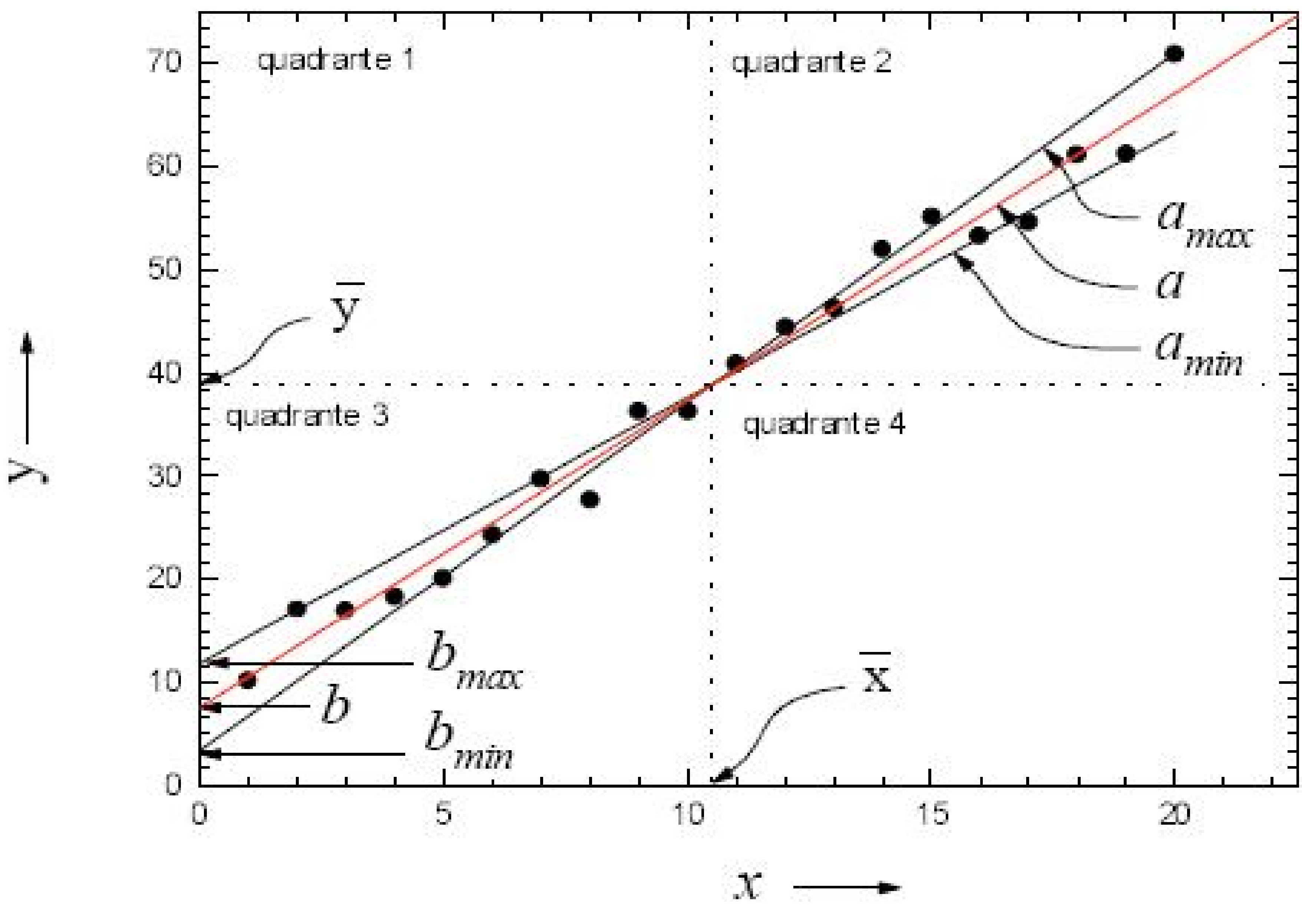
5. Agora gire a régua, sempre em torno do ponto (x,y), de modo de deixar 16 % dos pontos de cada quadrante acima e 84 % abaixo. A equação desta reta é $y = y + amax\ (x-x)$.
Esta reta determina a inclinação máxima, *amax*, e a sua prolongação até $x = 0$, *bmin*.

Método Gráfico

Se a sua apreciação foi correta, a reta média (item 3) deve ficar no meio das retas com inclinações mínima e máxima traçadas nos ítens 4 e 5. Para determinar os valores de *a* e *b*, assim como os erros padrões nestes parâmetros utilize as equações:

$$a = \frac{1}{2}(a_{max} + a_{min}),\ b = \frac{1}{2}(b_{max} + b_{min}),$$

$$\Delta\overline{a} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\left|a_{max} - a_{min}\right| \text{ e } \Delta\overline{b} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\left|b_{max} - b_{min}\right|.$$



Física Experimental IV - Profa Ana Barros