3. Lei de Gauss (baseado no Halliday, 4a edição)

Uma Nova Formulação da "Lei de Coulomb"

1.a) "A Lei de Coulomb" é lei básica da Eletrostática, mas não está expresso numa forma que possa simplificar os casos que envolvem elevado grau de simetria.

1.b) "A Lei de Coulomb" se aplica a casos em que as cargas estão em repouso ou quase-repouso.

2.a) A Lei de Gauss é uma nova formulação para a "Lei de Coulomb" que pode facilitar em casos que envolvem elevado grau de simetria.

2.b) A Lei de Gauss não possui restrições de tempo.

Em eletrostática a Lei de Gauss é equivalente a "Lei de Coulomb", a escolha entre elas depende do tipo de problema proposto:

"Lei de Coulomb" $\rightarrow$ usamos para problemas que tenham pequeno ou nenhum grau de simetria.

Lei de Gauss $\rightarrow$ usamos para problemas com elevado grau de simetria, nos quais, ela não só simplifica, como também forma novas idéias.

Do Que Trata a Lei de Gauss

A Lei de Gauss fornece uma nova forma de relacionarmos o Campo Elétrico com as cargas elétricas que o produziram.

Superfície Gaussiana

1) Superfície fechada hipotética.

2) Pode ter a forma que desejarmos, mas devemos escolhê-la de modo adequado à simetria do problema:

Ex.: esfera, cilindro, etc.

3) Ela deve ser sempre uma superfície fechada (de modo a definir o lado de dentro, o lado de fora e a superfície).

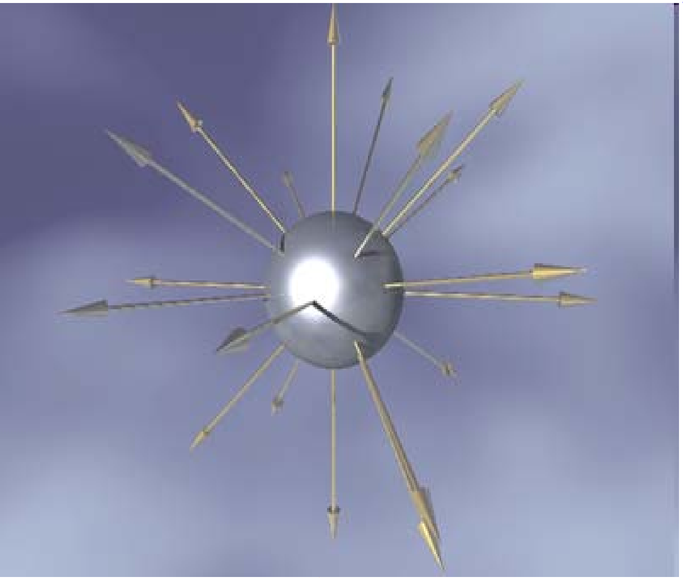
Se percorremos a superfície gaussiana com um medidor de campo elétrico, podemos, ou não, encontrar campos elétricos em vários pontos da superfície

Medimos o módulo, a direção e o sentido.

Se percorremos a superfície gaussiana com um medidor de carga, podemos, ou não, encontrar carga em vários pontos no interior

Medimos o módulo e o sinal.

“A Lei de Gauss relaciona os campos elétricos na superfície gaussiana com as cargas elétricas no seu interior.”



Superfície gaussiana esférica

Encontramos $\vec{E}$ todos de mesmo módulo e apontando radialmente para fora.

Podemos afirmar que temos uma carga elétrica, líquida, positiva no interior da superfície gaussiana.

Conhecendo a Lei de Gauss, podemos calcular a quantidade de carga líquida no interior da superfície gaussiana.

Para calcularmos a carga no interior da superfície, precisamos saber "quanto" campo elétrico é interceptado pela superfície $\rightarrow$ ***fluxo*** através da superfície.

Fluxo

Comparação com fluxo de ar:

1) O ar movendo-se com velocidade v, atravessando uma área A,

2) Vazão volumétrica Φ (taxa de ar que escoa através da área A)

onde $\Phi_v = v\,A$ e $\Phi_v = \vec{v}\cdot\vec{A}$ ou $\Phi_v = \int \vec{v}\cdot d\vec{A}$.

Unidades (Φ):

$[\Phi]$ = $[v]$ $[A]$ $\rightarrow$ S.I.$\rightarrow$ m/s m^2 = m^3/s.

Obs.: a palavra fluxo vem do latim *fluere* que significa “fluir”. Isto faz sentido para o ar, água, etc. mas para o campo elétrico fica um tanto mais abstrato, mas ainda assim, este é o significado.

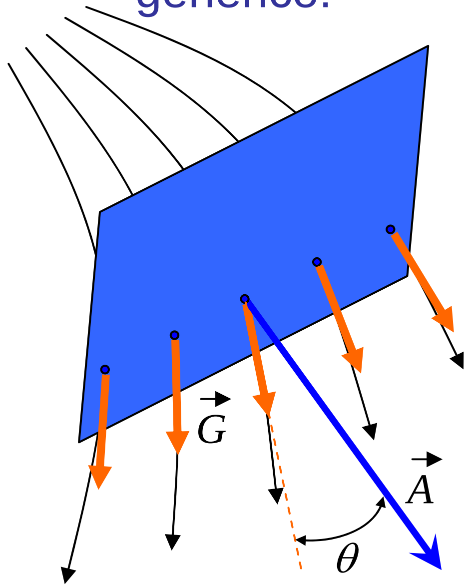
Podemos atribuir um vetor velocidade para cada ponto na corrente de ar que passa através de A. A composição de todos os vetores é um **campo de velocidade**.

a) Temos então, um fluxo de velocidade através de A.

b) Fizemos, então, a conexão entre o escoamento de algo real (água, ar, etc.) através de uma área, com uma quantidade que é um campo vetorial através de uma área $\rightarrow$ a passagem para campo elétrico é imediata

Fluxo de Um Campo Vetorial

Para definirmos fluxo do campo elétrico, vamos começar com um caso genérico:



1) Uma área arbitrária.

2) Para não perder a generalidade, vamos colocá-la imersa em um campo vetorial genérico não uniforme.

$$\boxed{\Phi_G = \int \vec{G} \cdot d\vec{A}}$$

A aplicação para o campo elétrico se torna bastante natural $\boxed{\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}$, como a superfície é fechada $\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}$.

Φ_E → fluxo do campo elétrico.

$\oint$ → integral sobre toda a superfície fechada.

$\vec{E}$ → campo elétrico.

$d\vec{A}$ → elemento diferencial de área.

θ	Direção e sentido de $\vec{E}$	Sinal de Φ_E
> 90^0	Para dentro da superfície gaussiana	Negativo
= 90^0	Paralelo à superfície gaussiana	Zero
< 90^0	Para fora da superfície gaussiana	Positivo

"O fluxo elétrico que sai da superfície gaussiana é positivo, e o que entra é negativo."

Unidade (Φ_E):

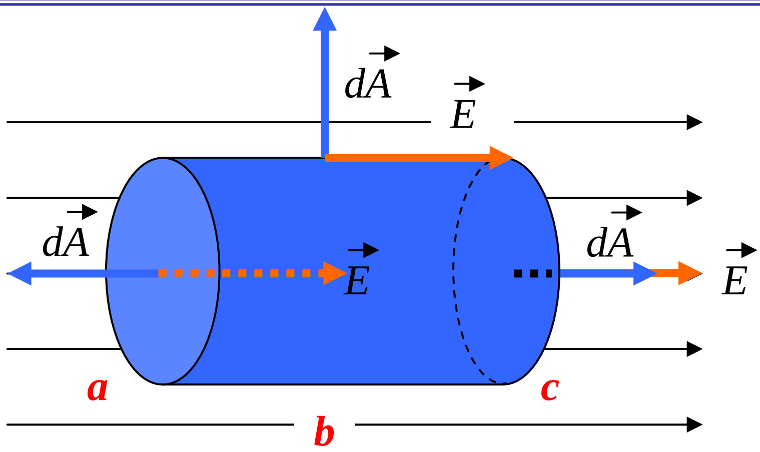
a) $[\Phi_E] = [E]\,[A]$ → no S. I. → **N/C m²**.

b) Valor unitário

$$\boxed{1\, {}^{N}\!/\!{}_{C}\, m^2 = 1\, {}^{N}\!/\!{}_{C}\, 1\, m^2}$$

[Exemplo 1)]

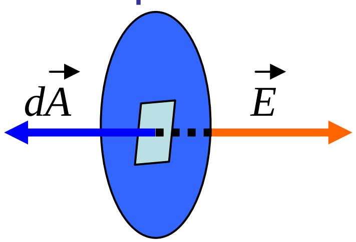
A figura a seguir mostra a superfície gaussiana na forma de um cilindro de raio R imerso em um campo elétrico uniforme E, com o eixo do cilindro paralelo. Qual é o fluxo Φ_E do campo elétrico através dessa superfície fechada?



Características: cilindro de raio R e área de base A, em um campo elétrico uniforme. Campo elétrico paralelo ao eixo do cilindro.

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

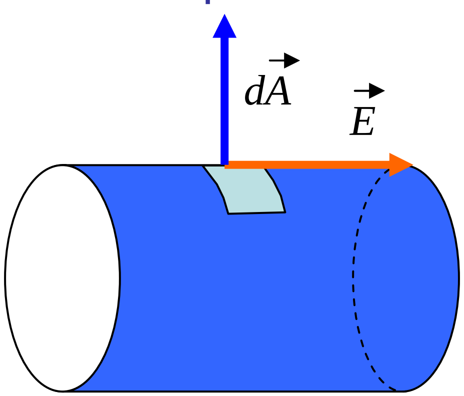
Na superfície *a*



−1 (θ = 180⁰)

$$\Phi_a = \int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_a E\, dA \cos\theta = -E\, A$$

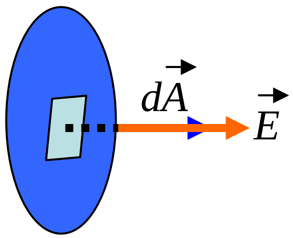
Na superfície *b*



0 (θ = 90⁰)

$$\Phi_b = \int_b \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_b E\, dA \cos\theta = 0\ N/C\ m^2$$

Na superfície ***c***



+1 $(\theta = 0^0)$

$$\Phi_a = \int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_a E\ dA\cos\theta = +E\ A$$

Então $\Phi_E = \Phi_a + \Phi_b + \Phi_c = -EA + 0 + EA = 0\ N/C\ m^2$.

Obs.: O resultado nos revela que o fluxo total na superfície fechada é zero (as mesmas linhas de campo que entram, saem da superfície fechada) $\rightarrow$ não existem cargas no interior da superfície gaussiana.

Lei de Gauss

A Lei de Gauss relaciona o fluxo elétrico total de um campo elétrico através de uma superfície gaussiana (fechada) e a carga elétrica no interior da superfície gaussiana.

O fluxo é proporcional à carga elétrica $\Phi_E \ \alpha\ q$.

Com a constante de proporcionalidade, temos finalmente

$$\boxed{\Phi_E = \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) q} \quad \text{ou} \quad \boxed{\varepsilon_0\, \Phi_E = q}\ .$$

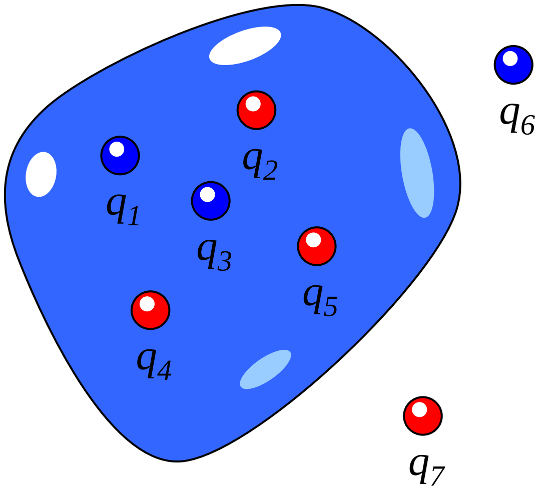
ε_0 → constante de permissividade elétrica do vácuo = $8{,}85 \times 10^{-12}\ C^2/N\ m^2$.

Finamente, podemos escrever a Lei de Gauss como

$$\boxed{\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q}$$

onde q é a soma de todas as cargas no interior da superfície gaussiana.

Obs.: 1) o sinal da carga elétrica q deve ser incluído na Lei de Gauss
$+q$ → indica um fluxo positivo do campo elétrico (fluxo que sai).
$-q$ → indica um fluxo negativo do campo elétrico (fluxo que entra)..



2) As cargas elétricas externas à superfície gaussiana (superfície azul envolvendo q_1, q_2, ...) não contribuem para a Lei de Gauss → contribuem com um fluxo *zero*.

3) A distribuição de cargas no interior da superfície gaussiana não interessa → somente a carga líquida ($q = \Sigma\, q_i$).

4) Só importa o sinal da carga líquida.

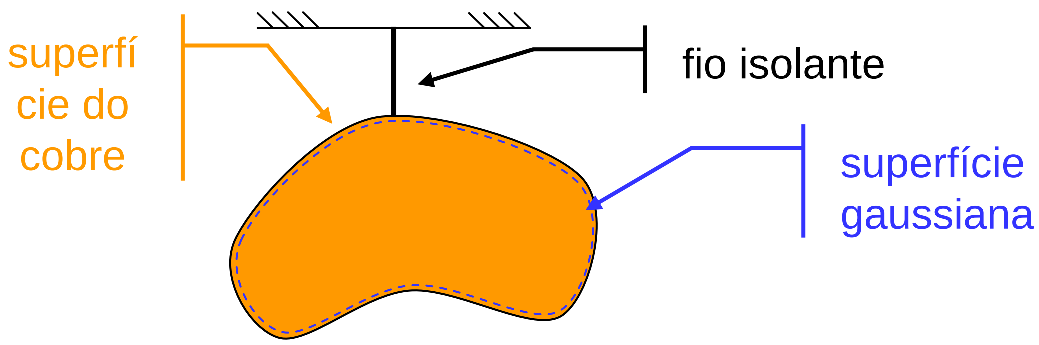
Ex.: $q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5$
q_6 e q_7 produzem fluxo nulo na superfície gaussiana.

Um Condutor Carregado e Isolado

A Lei de Gauss nos permite demonstrar:

"Qualquer excesso de carga colocada em um condutor isolado se moverá inteiramente para a superfície do condutor. Nenhum excesso de cargas será encontrada no interior do condutor."

Isto é, as cargas iguais se repelem e devem procurar se afastar o máximo possível umas das outras.



Características: Seção transversal de um pedaço de cobre isolado por um fio isolante, e tendo uma carga adicional q.

1) A superfície gaussiana foi traçada junto a face interna do condutor.

2) O campo elétrico no interior do condutor deve ser *zero*. Se fosse diferente de *zero*, o campo faria com as cargas elétricas se movessem criando correntes internas, como não existem correntes permanentes em um condutor $\rightarrow E = 0$ N/C.

3) No interior do condutor, o campo elétrico só aparece quando o condutor está sendo carregado, mas a carga rapidamente se distribui levando a $E = 0$ N/C no interior.

4) Quando esta carga cessa de movimentar, $F_R = 0$ N sobre cada carga $\rightarrow$ equilíbrio eletrostático.

5) Como $E = 0$ N/C no interior do condutor, o é também na superfície gaussiana, e o fluxo do campo elétrico através da superfície é zero e da Lei de Gauss temos que $q = 0$ C no interior do condutor.

6) Se a carga não está no interior da superfície gaussiana, só pode estar fora dela $\rightarrow$ na superfície externa do condutor.

Interior do condutor	Superfície externa do condutor
$q = 0$ C $E_{int} = 0$ N/C $F_{E\ int} = 0$N	$q \neq 0$ C E // sup $= 0$ N/C F_E // sup. $= 0$ N

Um Condutor Carregado e Isolado com Uma Cavidade

1) A cavidade está inteiramente no interior do condutor, como $E = 0$ N/C no interior do condutor, também o será no interior da nova superfície.

2) A carga, então, deve estar toda na superfície externa do condutor.

3) A tabela anterior continua sendo válida.

O Condutor Removido

Supondo que pudéssemos congelar as caras no lugar e depois remover o condutor.

1) Isto é equivalente a alargarmos a cavidade, analisada anteriormente, até que consuma o condutor,.

2) A configuração de q, E e F_E não mudariam (continua válida a tabela anterior).

Aplicações da Lei de Gauss

1º Caso) A Lei de Gauss e a "Lei de Coulomb"

"Lei de Coulomb" $\rightarrow$ devemos entender como sendo o método para calcularmos o campo elétrico, utilizado para distribuições contínuas de carga, onde integrávamos o campo elétrico da carga puntiforme.

Campo Elétrico Criado por Cargas Puntiformes

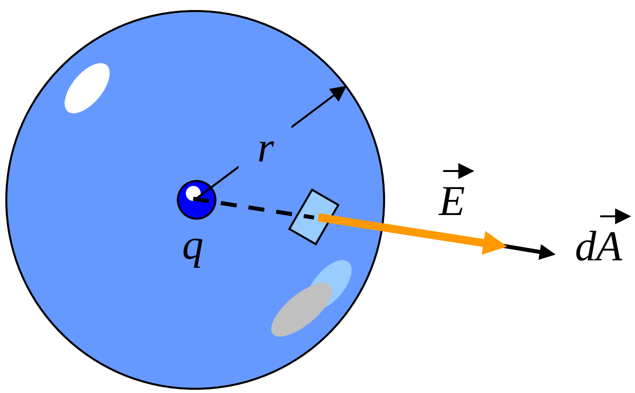
Características: carga elétrica puntiforme positiva.

a) O resultado da “Lei de Coulomb”, obtido anteriormente foi:

Módulo: $\boxed{E(P) = k_E \dfrac{q}{r^2}}$ ou $\boxed{E(P) = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}}$.

Direção e Sentido: radial, direcionado para fora da carga elétrica positiva.

b) Usando a Lei de Gauss:



q $\rightarrow$ carga puntiforme positiva.

S $\rightarrow$ superfície gaussiana esférica, concêntrica a q, de raio r.

$d\vec{A}$ $\rightarrow$ perpendicular à superfície gaussiana e orientado para fora.

$\vec{E}$ $\rightarrow$ perpendicular à superfície gaussiana e orientado para fora.

θ $\rightarrow$ ângulo entre $\vec{E}$ e $d\vec{A} = 0^0$.

Da Lei de Gauss $\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q$, onde $\varepsilon_0 \oint E\ dA\ \overset{+1\ (\theta = 0^0)}{\cos\theta} = q$

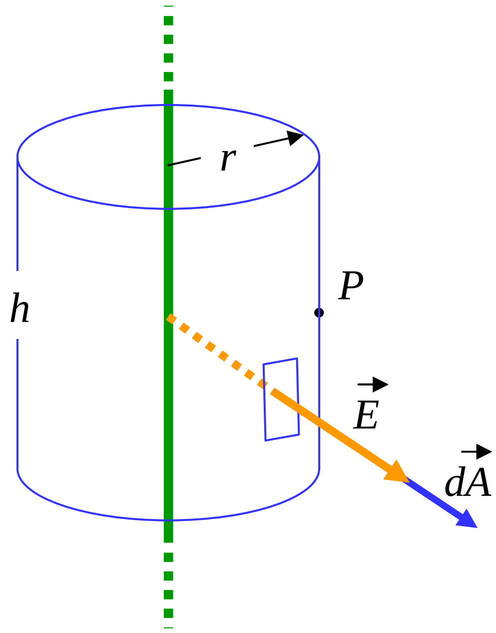
onde $\varepsilon_0 \oint \overset{\text{Cte em } dA}{E}\ dA = q$, $\varepsilon_0\ E \oint \overset{\text{Área sup. gaussiana}}{dA} = q$ e $\varepsilon_0\ E\ A_{s.g.} = q$, como $A_{s.g.} = 4\pi\ r^2$

Módulo: $\boxed{E(P) = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}}$.

Direção e Sentido: radial, direcionado para fora da carga positiva.

2º Caso) Simetria Cilíndrica

Características: barra fina isolante (plástico) infinitamente longa, carregada uniformemente com carga q.



a) Problema: calcular o campo elétrico no ponto P, a uma distância r do fio/barra fina, isolante.

b) Superfície gaussiana cilíndrica de raio r e altura h (passando pelo ponto P).

c) O campo elétrico é sempre radial ao fio/fita, como os “raios da roda de uma bicicleta”.

O por quê da Simetria Cilíndrica:

"Imaginemos que enquanto não estávamos olhando, alguém tivesse girado o fio/barra de plástico em torno do seu eixo (simetria em θ) e/ou a tivesse invertido (simetria em z). Mas se o tivessem movido para esquerda ou direita (simetria em r), teríamos percebido." $\rightarrow$ invariante em θ e z mas não em r (simetria cilíndrica).

Aplicando a Lei de Gauss:

a) O cilindro é composto por 3 áreas: a da base (***a***), a lateral (***b***) e a superior (***c***), então devemos calcular a Lei de Gauss para estas 3 áreas.

aplicando $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$; $\varepsilon_0 \left(\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} \right) = q$ como o fluxo em ***a*** e ***c*** são *zero*, só nos resta resolver a integral de fluxo sobre a superfície lateral ***b***

então $\varepsilon_0 \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$ ou $\varepsilon_0\ E\ A_{s.g.} = q$ com $A_{s.g.} = 2\pi\ r\ h$ e $\lambda = \dfrac{q}{L} = \dfrac{q}{h} = Cte$

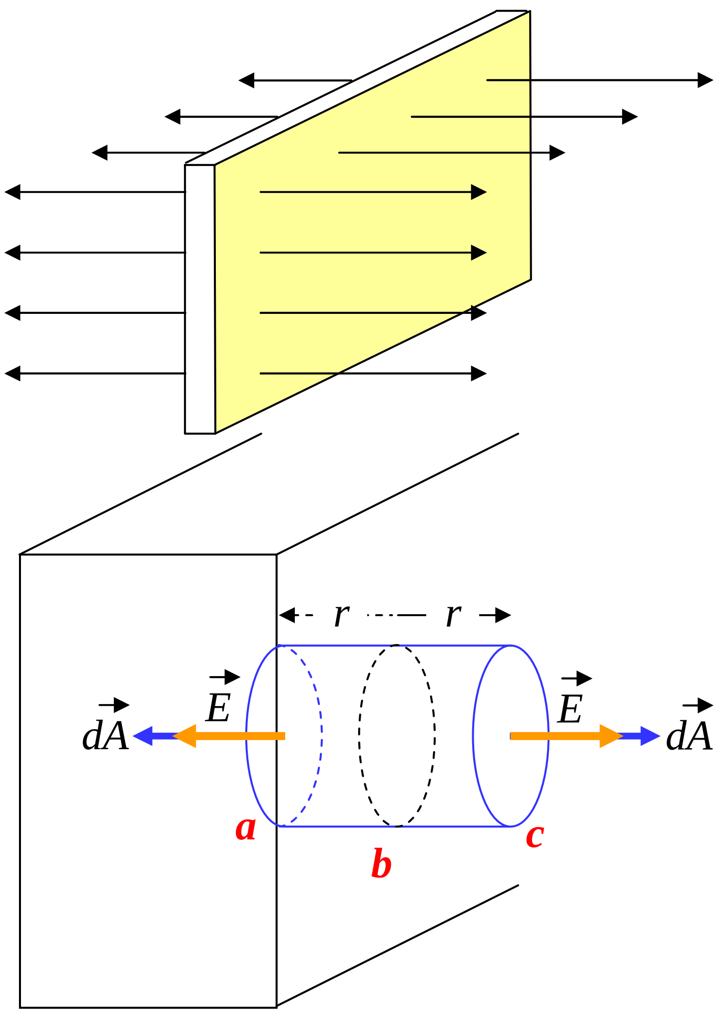
Módulo: $\boxed{E(P) = \dfrac{1}{2\pi\ \varepsilon_0}\ \dfrac{\lambda}{r}}$.

Direção e Sentido: radial, direcionado para fora do fio/barra de plástico.

3º Caso) Simetria Plana

a) Chapa Não Condutora.

Características: chapa fina, não condutora, carregada uniformemente com carga q em uma de suas faces.



a) Problema: calcular o campo elétrico no ponto P, a uma distância r da placa isolante.

b) Superfície gaussiana cilíndrica de área A e comprimento $2r$ (passando pelo ponto P).

c) O campo elétrico perpendicular à placa isolante.

d) Aplicando a Lei de Gauss

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q \quad \text{e} \quad \varepsilon_0\left(\int_a \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E}\cdot d\vec{A}\right) = q$$

o fluxo na área ***b*** é *zero*, e nas áreas ***a*** e ***c***

$$\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\, dA \underbrace{\cos\theta}_{+1\ (\theta = 0^0)}$$

$$\int_a \underbrace{E}_{\text{Cte em } dA} dA = E\, A_{s.g.} \quad \text{onde } A_{s.g.} = A \quad \text{voltando}$$

$$\varepsilon_0\left(E\,A + 0 + E\,A\right) = q \quad \text{e} \quad \varepsilon_0\left(2\,E\,A\right) = q \quad \text{onde } \sigma = \frac{q}{A} = Cte$$

Módulo: $\boxed{E(P) = \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}}$.

Direção e Sentido: horizontal para fora da maior face da placa (ambos os lados) não condutora.

b) Chapa Condutora.

Características: chapa fina, condutora, carregada uniformemente com carga q.

a) Problema: calcular $E(P)$ a uma distância r da placa condutora.

b) Como o problema é idêntico ao anterior, podemos usar as mesmas figuras, com a exceção de que o campo elétrico no interior de um condutor é nulo, logo, temos que o fluxo é *zero* na área ***a*** (pois $E = 0$ N/C) e na área ***b*** (o fluxo não atravessa a área ***b***). A integral (fluxo) sobre a área ***c*** foi calculada no caso anterior e vale $+E\,A$, logo

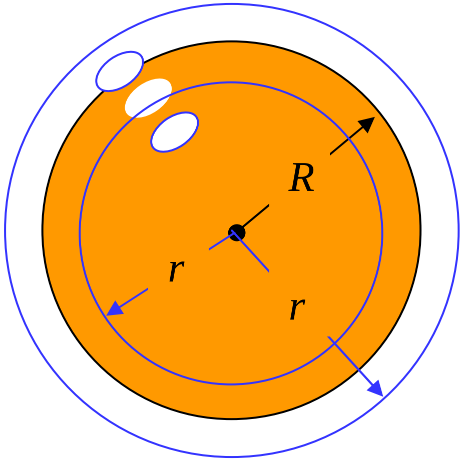
Módulo: $\boxed{E(P) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}$.

Direção e Sentido: horizontal para fora da maior face da placa (ambos os lados) não condutora.

4º Caso) Simetria Esférica

Usando a Lei de Gauss podemos provar os teoremas sobre cascas esféricas, que foram propostos no Capítulo de Carga Elétrica.

Problema: casca esférica de raio R, carregada uniformemente com carga q.



Teorema 1: “uma casca esférica, uniformemente carregada, atrai ou repele uma partícula carregada, externa à casca, como se toda a sua carga elétrica estivesse concentrada em seu centro.”

Envolvemos a casca esférica com uma superfície gaussiana esférica de raio $r > R \rightarrow$ superfície S_1.

A carga elétrica no interior da superfície S_1 produz um campo elétrico na superfície S_1 idêntico àquele produzido por uma carga puntiforme $\rightarrow$ então a casca esférica uniformemente carregada se comporta como uma carga puntiforme.

Teorema 2: “uma casca esférica, uniformemente carregada, não exerce nenhuma força eletrostática sobre uma partícula carregada que esteja localizada em seu centro.”

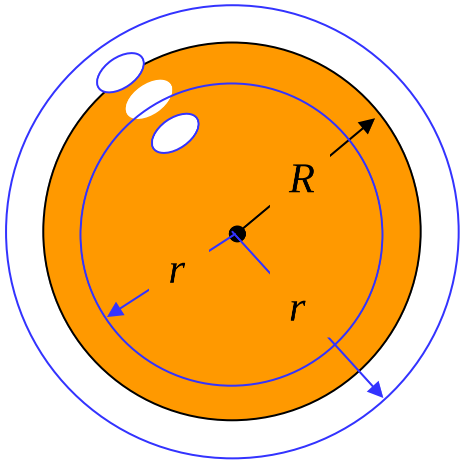
Quando colocamos uma superfície gaussiana no interior da casca esférica, $r < R$, não temos cargas elétricas contidas no interior da superfície S_2, logo $E = 0$ N/C e portanto, para qualquer carga que colocarmos no interior de S_2, não teremos nenhuma força eletrostática atuando sobre ela.

Teorema 3: “qualquer excesso de carga elétrica colocada em uma casca esférica, feita de material condutor, se espalhará uniformemente sobre a superfície externa da casca.”

Este teorema foi provado quando tratamos com o condutor (genérico) carregado e isolado $\rightarrow$ não há cargas no interior da superfície gaussiana que envolve o condutor pelo lado de dentro, portanto, as cargas elétricas estão na superfície externa do condutor.

5º Caso) Distribuição Esférica Uniforme de Carga

Problema: todo o volume esférico está carregado, uniformemente, com carga q ($\rho = \rho(r) = \mathrm{C\underline{te}}$).



Para $r > R$: para esta superfície gaussiana, todo o volume de cargas se comporta como uma carga puntiforme $\rightarrow$ então é carga puntiforme.

Módulo: $\boxed{E(P) = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}}$.

Direção e Sentido: radial, direcionado para fora da esfera carregada (positivamente).

Para $r < R$: separamos o volume original da esfera, em dois volumes, o ocupado pela superfície gaussiana (V ') e o externo à superfície gaussiana (V ").

V " $\rightarrow$ não contribui para a Lei de Gauss, pois as cargas q", são externas.

V ' $\rightarrow$ o campo elétrico na superfície gaussiana é devido às cargas neste volume, q'. Como para esta superfície gaussiana, estas cargas produzem um campo elétrico idêntico ao de uma carga puntiforme, então

então $E(P) = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{q'}{r^2}$ como $\rho = \dfrac{q}{V} = \dfrac{q'}{V'} = Cte$, usando $\dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3}$

Módulo: $\boxed{E(P) = \left(\dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^3}\right) r}$.

Direção e Sentido: radial, direcionado para fora do volume V '.

Lista de Exercícios Complementar 3

2E)	pág. 56
3E)	pág. 56
9E)	pág. 57
14P)	pág. 57
27P)	pág. 58
31E)	pág. 59
48P)	pág. 60
54P)	pág. 60