A maneira de apresentar o modelo elétrico que vamos nos basear para estudar indutores e circuitos RL é essencialmente igual a que foi apresentada na Unidade anterior no estudo de circuitos RC, visto que a solução formal das equações do circuito RC e do circuito RL são as mesmas, exceto que intercambiamos as voltagens e as correntes de um caso em relação ao outro. Nessas condições, a equação caraterística do indutor ideal é dada por

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Se aplicarmos uma voltagem alternada, análogo ao caso do capacitor, é de se esperar que a corrente varie na forma

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

onde φ corresponde à diferença de fase entre a corrente e a voltagem induzida. Considerando que a voltagem induzida seja da forma $V_L(t) = V_L \sin(\omega t)$, a equação caraterística fica sendo

$$V_L \sin(\omega t) = \omega L i_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

expandindo-se a função cosseno, resulta, igualando os coeficientes de $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$

$$\left(\omega L i_0\right)\cos\varphi = 0$$

$$V_0 = -\left(\omega L i_0\right)\sin\varphi \qquad (6\text{-}1)$$

A primeira dessas equações nos diz que $\varphi = \pm\,\pi/2$. E a segunda dessas equações nos diz que a única possibilidade é termos $\varphi = -\,\pi/2$. Portanto, as funções correspondentes à corrente e voltagem em um indutor ideal serão

$$V_L(t) = V_L \sin(\omega t)$$

$$i_L(t) = i_0 \sin(\omega t - \pi/2)$$

e, nesse caso, a corrente estará atrasada de $\pi/2$ radianos em relação à voltagem. Essa situação é ilustrada na linha pontilhada da Fig.(6-1). A Eq.(6.1) nos diz, também que

$$V_0 = \left(\omega L\right) i_0 = X_L\, i_0 \qquad (6\text{-}2)$$

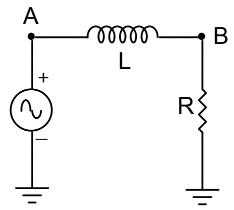
onde

$$X_L = \omega L \qquad (6\text{-}3)$$

A Eq.(6.2) é o equivalente da lei de Ohm para indutores. O termo X_L que tem dimensão de ohm (Ω), é chamado de **reatância indutitiva**, e é proporcional à freqüência, Eq.(6-3).

Circuitos RL

Em circuitos RL do tipo mostrado na figura abaixo, a lei das malhas diz que



$$V_S = V_L + V_R \quad \Rightarrow \quad V_0 \sin(\omega t) = L\frac{di}{dt} + R\,i \tag{6.4}$$

Como se trata de circuitos lineares, é de se esperar que a corrente tenha a forma geral

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

onde φ representa a diferença de fase entre a voltagem e a corrente no circuito. Derivando-se a corrente em relação ao tempo na Eq.(6.4), teremos,

$$V_0 \sin(\omega t) = \omega L i_0 \cos(\omega t + \varphi) + R i_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Trabalhando-se essa equação da mesma forma que fizemos para o caso de um circuito RC, vamos obter a seguinte equação:

$$\sin(\omega t)\left[R i_0 \cos\varphi - (\omega L i_0)\sin\varphi - V_0\right] + \cos(\omega t)\left[(\omega L i_0)\cos\varphi + (R i_0)\sin\varphi\right] = 0$$

Os coeficientes desses termos, como são independentes, devem ser individualmente nulos. Teremos, pois, duas equações, uma para cada coeficiente

$$(R i_0)\cos\varphi - (\omega L i_0)\sin\varphi = V_0 \tag{6.5}$$

$$(\omega L i_0)\cos\varphi + (R i_0)\sin\varphi = 0 \tag{6.6}$$

A Eq.(6.6) mostra que o ângulo de fase φ entre a voltagem e a corrente é dado por

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\omega L}{R} = -\frac{X_L}{R} \tag{6.7}$$

e está situado entre $-\pi/2$ e 0 (valor negativo para a tangente), mostrando que a corrente está atrasada em relação à voltagem no indutor.

Elevando-se as Eqs. 6.5 e 6.6 ao quadrado e somando-as membro a membro, obtemos

$$\frac{V_0}{i_0} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = Z \tag{6.8}$$

onde, da mesma forma que no caso anterior dos circuitos RC, a letra Z é chamada de impedância, tem a dimensão de ohm (Ω) e é dada por

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \tag{6.9}$$

As Eqs.(6.5, 6.6 e 6.8) nos mostram, também, que a impedância pode ser obtida a partir de um plano onde o eixo horizontal representa a resistência e o eixo vertical (orientado para baixo) a reatância indutiva. Como no caso da reatância capacitiva, a composição entre a resistência e a reatância segue as mesmas regras de composição de um número complexo. O ângulo φ, que varia entre 0 e -π/2, está associado à existência de reatância indutiva no circuito.

As Eqs. (6.5) e (6.6) nos dão ainda, da mesma forma que para o circuito RC, as seguintes relações

$$V_0^2 = V_R^2 + V_L^2 \tag{6.10}$$

enquanto que teremos, alternativamente, para o ângulo de fase a expressão

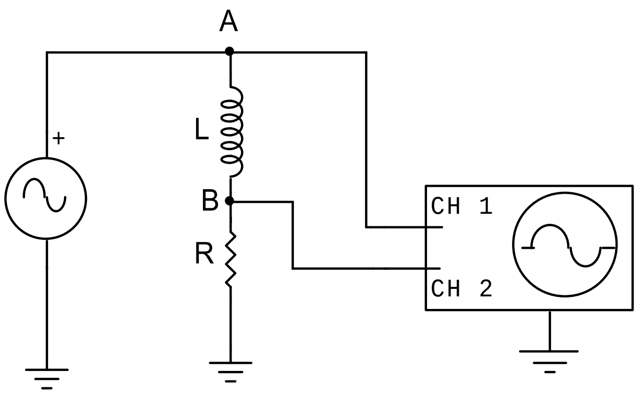
$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{V_L}{V_R} \tag{6.11}$$

A Eq.(6.3) mostra que no indutor, quanto maior a freqüência, maior a reatância indutiva e a Eq.(6.7) diz que maior será a defasagem entre a voltagem e a corrente. Assim, em um circuito RL, para $\omega \to \infty$, o circuito atua como se fosse puramente indutivo enquanto que para $\omega \to 0$ ele tende a se comportar como se fosse puramente resistivo, comportamento esse justamente oposto ao da reatância capacitiva.

Circuitos RL

Procedimento 6-1

1. Vamos verificar a Lei de Ohm, desta vez para indutores. Queremos verificar como se comporta a reatância indutiva com a freqüência. Para isso vamos montar o circuito da figura abaixo, usando os seguintes resistores e indutores: L = 2mH, R = 10Ω. Novamente vamos medir a voltagem no resistor de 10Ω para determinar a corrente que passa pelo circuito através da relação $i=V_R/R$.
2. Ligue os equipamentos e ajuste o gerador (CH1) para um sinal senoidal, com freqüência aproximada de 200 Hz. Meça o período (e sua incerteza) com o osciloscópio e determine a freqüência com sua incerteza.



3. Ajuste a amplitude no gerador para que o valor de pico (V_P) da diferença de potencial entre o ponto B e o TERRA no circuito (CH2) seja de 0.1V. Lembre-se de colocar ambos canais na mesma referência para poder medir ambos simultaneamente. A colocação dessa referência sobre a linha inferior da tela do osciloscópio maximizará a resolução da medida, como realizado nos procedimentos 4-1 e 5-1. Anote este valor na Tabela 6-1 correspondente, como indicado. Usando o valor nominal e a tolerância do resistor R, determine a corrente que passa pelo circuito, com sua incerteza.
4. Meça o valor de V_A (diferença de potencial da fonte) e anote este valor na Tabela como indicado
5. Verifique que há uma diferença de fase entre os dois sinais. Meça esta diferença medindo a diferença temporal entre os dois sinais (diferença de tempo entre duas passagens pelo zero nas mesmas condições, por exemplo) e calcule o ângulo de fase (em radianos) sabendo que

$\varphi = \omega\Delta t = 2\pi f\Delta t$. Veja a figura a seguir para entender melhor o processo de medida da diferença de fase

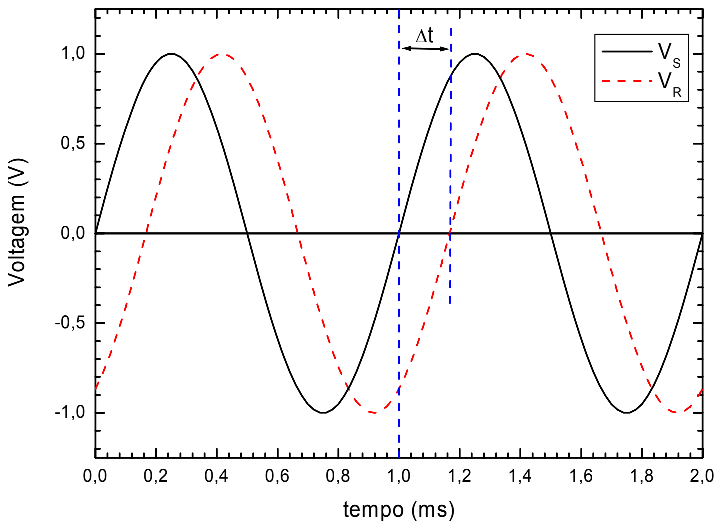


Fig. 6-1: As formas da voltagem no circuito RL da nossa montagem experimental. A linha contínua representa a voltagem de referência da fonte (V_A), e a linha tracejada a voltagem no resistor (V_B). Como já foi visto, em um resistor a corrente e a voltagem estão em fase. A diferença de fase que está ocorrendo deve-se à presença do indutor.

6. Repita os itens anteriores ajustando amplitude do gerador de modo que a voltagem no ponto B vá aumentando em intervalos de 0.1V até completar a Tabela.

7. Repita todos os itens anteriores para as seguintes freqüências: 500Hz, 1KHz e 2kHz, e complete as Tabelas restantes correspondentes..Para facilitar, os valores de V_B já estão registrados nas tabelas.

Análise de Dados

1. Em uma mesma folha de papel milimetrado trace a curva V_L em função de i para cada frequência (sugestão: use símbolos diferentes para cada freqüência).

2. Verifique, para cada freqüência, se há linearidade entre corrente e voltagem.

3. O indutor é um elemento ôhmico para uma dada freqüência ?

4. Encontre o valor das reatâncias indutivas para cada freqüência através do coeficiente angular das curvas encontradas usando o MMQ e coloque-o na Tabela 6-2.

5. A reatância do indutor (X_L) se altera com a freqüência?

6. Usando a expressão da reatância indutiva, calcule o valor esperado da reatância indutiva para cada freqüência medida e compare esse valor com o coeficiente angular de cada curva obtida anteriormente e complete a Tabela 6-2. Explique o comportamento observado. O que ocorre com a reatância quando aumentamos a freqüência do sinal? Ela aumenta ou diminui? Por que?

7. Qual seria a reatância para um freqüência próxima de zero ?

Tabela 6-1: $V_L = (V_A^2 - V_B^2)^{1/2}$, $\varphi = 2\pi f\,\Delta t = 2\pi\Delta t / T$

f = 200Hz

$(T \pm \delta T)$ s=		$(f \pm \delta f)$ Hz=	
V_B (V)	i (mA)	V_A (V)	V_L (V)
0,10			
0,20			
0,30			
0,40			
0,50			
0,60			
0,70			
Δt =		φ	

f = 500Hz

$(T \pm \delta T)$ s=		$(f \pm \delta f)$ Hz=	
V_B (V)	i (mA)	V_A (V)	V_L (V)
0,10			
0,20			
0,30			
0,40			
0,50			
0,60			
0,70			
Δt =		ϕ =	

f = 1kHz

$(T \pm \delta T)$ s=		$(f \pm \delta f)$ Hz=	
V_B (V)	i (mA)	V_A (V)	V_L (V)
0,10			
0,20			
0,30			
0,40			
0,50			
0,60			
0,70			
Δt =		ϕ =	

f = 2kHz

$(T \pm \delta T)$ s=		$(f \pm \delta f)$ Hz=	
V_B (V)	i (mA)	V_A (V)	V_L (V)
0,10			
0,20			
0,30			
0,40			
0,50			
0,60			
0,70			
Δt =		ϕ =	

Tabela 6-2:

Freqüência	Reatância nominal	Reatância medida
200Hz		
500Hz		
1000Hz		
2000Hz		

Procedimento 6-2 **(Determinação do valor de L)**

Nessa experiência vamos determinar o valor da auto-indutância de um indutor utilizando o mesmo circuito do Procedimento 6-1, utilizando um resistor com R = $(100\pm1)\Omega$ e um indutor qualquer, do qual queremos saber o valor de L.

Isso é feito lembrando que $Z = \frac{V_G}{i_0} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ou $\frac{V_G}{V_R} = \sqrt{1 + (\omega L / R)^2}$.

Para valores de ($\omega L/R$) >> 1 e mantendo o valor de V_R sempre constante ao longo do experimento, obtemos a expressão

$$V_G = \left(\frac{2\pi V_R L}{R}\right) f$$

que é uma relação linear do tipo $V_G = \alpha$ f, desde que o valor de V_R permaneça constante

1. Monte o mesmo circuito do Procedimento 6-1 com R = (100±1)Ω e um indutor qualquer.
2. Ajuste o valor de V_R para 1V e o mantenha sempre constante, para todas as frequências utilizadas. Preencha a tabela abaixo com os valores de f e V_G correspondentes (começando com 1kHz, por exemplo) e variando a frequência em intervalos regulares.

   Obs.: A melhor maneira de se determinar a frequência desejada, consiste em medirmos o período correspondente pelo osciloscópio.

#	f (Hz)	V_G (V)	#	f (Hz)	V_S (V)
1			6		
2			7		
3			8		
4			9		
5			10		

3. Faça o gráfico de V_G em função de f, colocando a frequência no eixo horizontal, e determine por meios numéricos o valor do coeficiente angular, α, dessa reta com a respectiva incerteza. A incerteza de V_R será determinada da leitura do osciloscópio e dependerá, portanto, da escala utilizada.
4. A partir do valor de α, determine o valor de L com a sua incerteza. Calcule a discrepância entre o valor medido e o valor fornecido pelo fabricante (quando esse valor estiver escrito sobre a bobina). Discuta o resultado levando em consideração as condições gerais da experiência realizada

Auto indutância e indutância mútua

A voltagem induzida em um solenoide deve-se, basicamente, à variação do fluxo magnético no interior do solenoide. No caso geral, essa variação de fluxo pode ser devida à uma variação da corrente que circula no próprio solenoide ou a uma variação de fluxo pelo fato do solenoide estar situado numa região onde campos magnéticos gerados por fontes externas ao solenoide variam. Quando a voltagem induzida for gerada apenas pela variação da corrente no próprio indutor, L é chamado também de auto-indutância. Esse é o caso dos circuitos que estudamos na seção anterior.

Quando tivermos, por exemplo, dois solenoides próximos percorridos por correntes elétricas i_1 e i_2, esses circuitos exercem ação magnética mútua. O fluxo ϕ_1 que atravessa o circuito 1, por exemplo, será devido aos campos produzidos pelos circuitos 1 e 2. O mesmo vale para o fluxo ϕ_2 que atravessa circuito 2. A lei de Biot-Savart diz que esses fluxos são proporcionais às correntes nos respectivos circuitos:

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\phi_2 = L_2\, i_2 + M\, i_1$$

onde L_1 e L_2 são as auto-indutâncias dos circuitos e M a indutância mútua.

Suponhamos agora que o circuito 1 esteja ligado a uma fonte e que o circuito 2 esteja aberto (ou ligado a uma impedância muito alta, como por exemplo a entrada de um osciloscópio). Neste caso $i_2 = 0$ e, assim,:

$$\phi_2 = M\, i_1$$

Se, por exemplo, i_1 for uma função senoidal do tempo,

$$i_1 = i_{10} \sin(\omega t)$$

então,

$$\phi_2 = M\, i_1 = M i_{10} \sin(\omega t)$$

e a voltagem induzida no circuito 2 será :

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = \omega M\, i_{10} \cos(\omega t)$$

cuja amplitude é dada por :

$$V_{20} = \omega\, M\, i_{10} = 2\pi f M i_{10}$$

A tensão no circuito 2 terá, obviamente, a mesma freqüência que a tensão da fonte no circuito 1.

A experiência nos permitirá verificar que a relação entre V_{20} e f é realmente linear, assim como o valor da indutância mútua para a respectiva configuração dos circuitos. O valor de M depende essencialmente da geometria dos circuitos, ou seja :

1) tamanho das bobinas
2) material que compõe o núcleo
3) distância entre as bobinas
4) posição relativa das bobinas

O cálculo de M é um pouco complexo e deve ser feito para cada situação particular. No caso ideal, em que o acoplamento magnético entre as bobinas é perfeito, temos :

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

No caso real em que o acoplamento não é máximo, temos :

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

A constante k indica a intensidade do acoplamento, podendo ter valores entre zero, que corresponde a um acoplamento nulo, e 1, que corresponde a um acoplamento perfeito.

O Transformador

Uma aplicação importante da lei de Faraday-Lenz é o transformador. Num transformador, uma bobina com n_p espiras é acoplada, através de um circuito magnético fechado, a uma outra bobina com n_s espiras. Veja a figura abaixo.

Com esta montagem, o fluxo magnético fica praticamente todo contido no núcleo ferromagnético. Temos o mesmo fluxo por espira, mesmo com carga, isto é, uma impedância finita entre os terminais da bobina secundária. Assim, a voltagem induzida de cada lado do transformador fica:

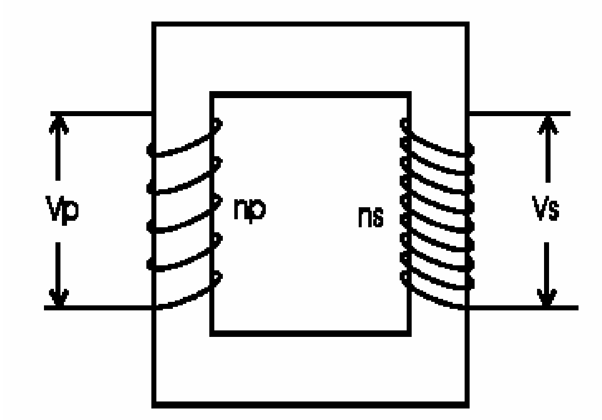
$$V_p = -\frac{d}{dt}n_p\phi = -n_p\frac{d\phi}{dt},$$

$$V_s = -\frac{d}{dt}n_s\phi = -n_s\frac{d\phi}{dt},$$

e, portanto,

$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{n_p}{n_s}$$

Esta é a relação de transformação. Isto significa que tensões de entrada (V_p) senoidais, resultarão em tensões senoidais de saída (V_s) amplificadas ou reduzidas pela razão entre o número de espiras de cada bobina n_s/n_p.



Procedimento 6-3

1) Monte o circuito da figura abaixo utilizando as bobinas disponíveis e um resistor de 1kΩ. Coloque uma bobina próxima da outra ou um núcleo de ferro entre elas de forma a maximizar o fluxo mútuo.

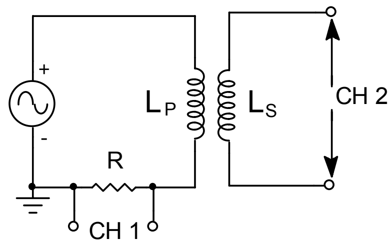


Figura 6-1 - Circuito para medida da indutância mútua

2) Ajuste a saída do gerador para ondas senoidais e, variando a freqüência, determine a região onde V_S varia linearmente em função de f.

3) Complete a tabela abaixo com valores de V_S (valor da amplitude no secundário) e de f mantendo a voltagem do CH 1 sempre igual a 1V.

#	f (Hz)	V_S (V)	#	f (Hz)	V_S (V)
1			6		
2			7		
3			8		
4			9		
5			10		

Observação importante: Note que o canal 1 do osciloscópio é utilizado para monitorar a corrente no circuito primário (através da voltagem no resistor) e não a tensão da fonte. Para cada valor novo da freqüência, a voltagem da fonte deve ser ajustada de modo a manter constante o valor de pico I_{10} medido no canal 1 e, assim, manter constante o valor do coeficiente angular da reta $V_S = (2\pi M I_{10})f$

4) Faça um gráfico de V_S em função de f em escala linear, e ajuste numericamente os pontos do gráfico através de uma reta.

5) Obtenha o valor de M, a indutância mútua, sabendo que I_{10} é a amplitude da corrente no circuito primário. Estime o erro em sua medida.