

Lei de Gauss



Esta criança adquire cargas elétricas ao tocar a esfera metálica carregada. Os cabelos eletricamente carregados da cabeça da criança se repelem e ficam eriçados. Se a criança ficar *dentro* de uma grande esfera metálica carregada, o cabelo dela ficará em pé?

Carga elétrica e fluxo elétrico

Propriedades das linhas de campo elétrico

A quantidade de linhas de campo associada a uma distribuição de carga elétrica é proporcional à carga da distribuição

Quanto maior a carga, maior a quantidade de linhas de campo.

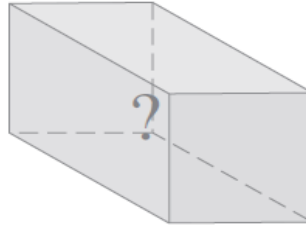
Linhas de campo não se cruzam!

Divergem de cargas positivas;

Convergem para cargas negativas;

O vetor campo elétrico em um ponto do espaço é tangente à linha de campo naquele ponto

(a) Uma caixa com uma quantidade de carga desconhecida



(b) A carga elétrica no interior da caixa pode ser detectada usando-se uma carga de teste no exterior da caixa para medir o campo elétrico

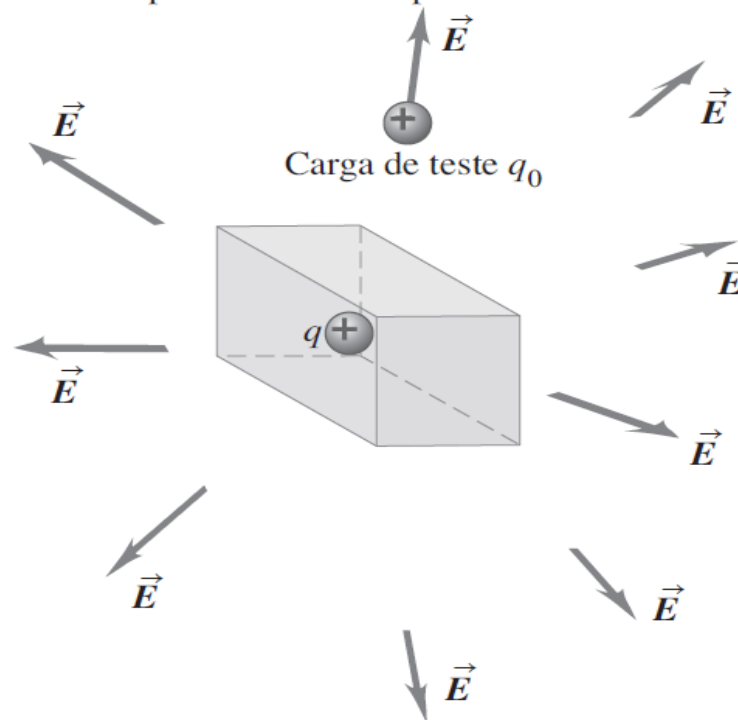
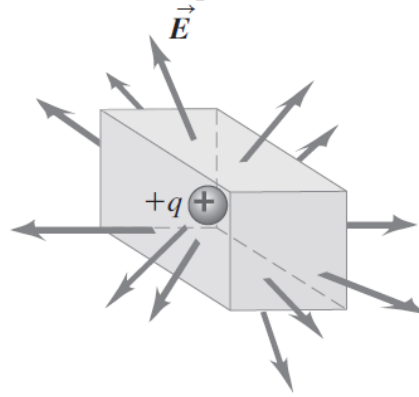
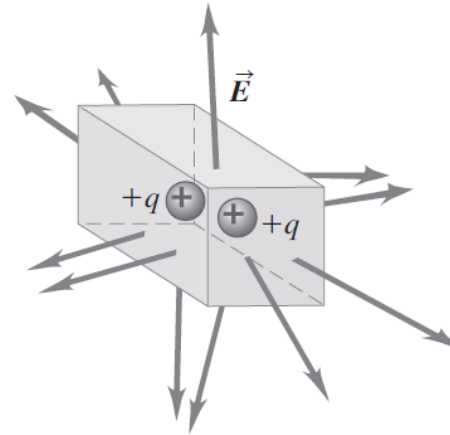


Figura 22.1 Como medir a carga no interior de uma caixa sem abri-la?

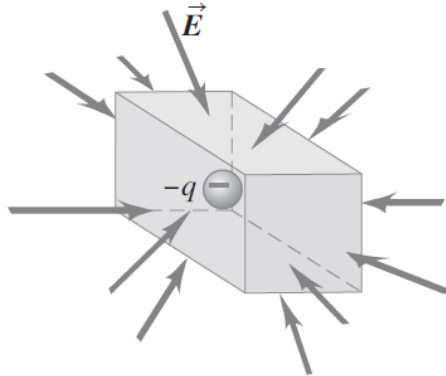
(a) Carga positiva dentro da caixa, fluxo de dentro para fora



(b) Cargas positivas dentro da caixa, fluxo de dentro para fora



(c) Carga negativa dentro da caixa, fluxo de fora para dentro



(d) Cargas negativas dentro da caixa, fluxo de fora para dentro

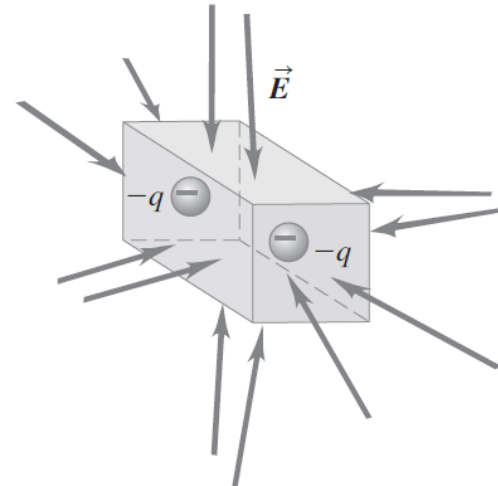
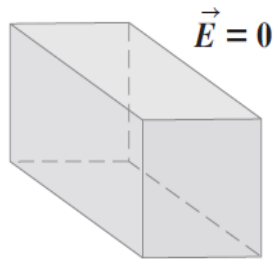
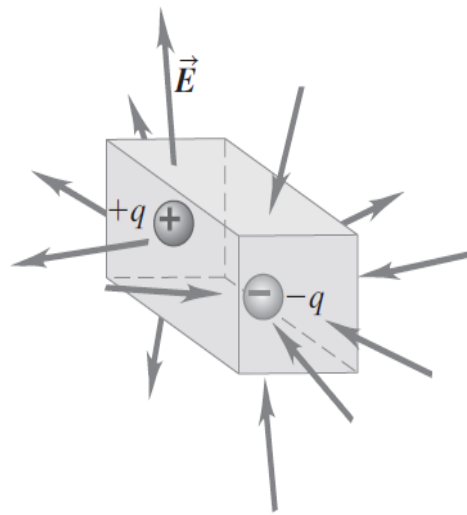


Figura 22.2 Campo elétrico sobre a superfície de caixas contendo (a) uma única carga puntiforme positiva, (b) duas cargas puntiformes positivas, (c) uma única carga puntiforme negativa ou (d) duas cargas puntiformes negativas.

(a) Carga igual a zero dentro da caixa, fluxo igual a zero



(b) Carga líquida igual a zero dentro da caixa, o fluxo de fora para dentro cancela o fluxo de dentro pra fora



(c) Carga igual a zero dentro da caixa, o fluxo de fora para dentro cancela o fluxo de dentro para fora

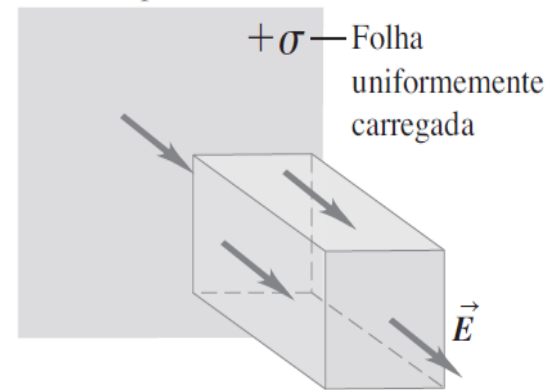
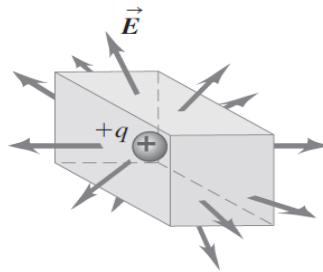
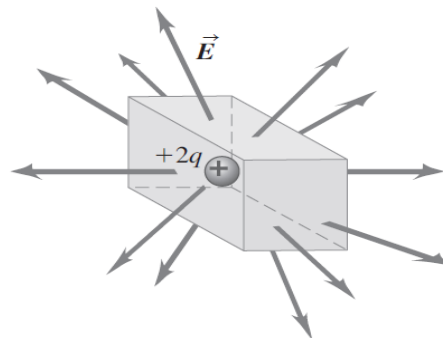


Figura 22.3 Três casos nos quais a carga líquida é igual a zero dentro da caixa e o fluxo elétrico através da superfície da caixa é igual a zero. (a) Uma caixa vazia com $\vec{E} = 0$. (b) Uma caixa com uma carga positiva e uma carga negativa com mesmo módulo. (c) Uma caixa vazia imersa em um campo elétrico uniforme.

(a) Uma caixa contendo uma carga



(b) Duplicar a carga englobada equivale a duplicar o fluxo



(c) Duplicar as dimensões da caixa não altera o fluxo

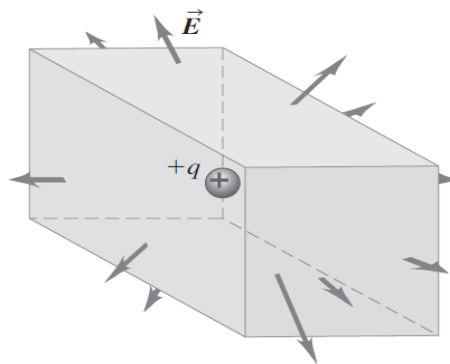
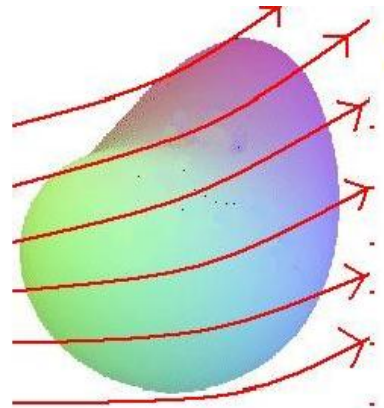


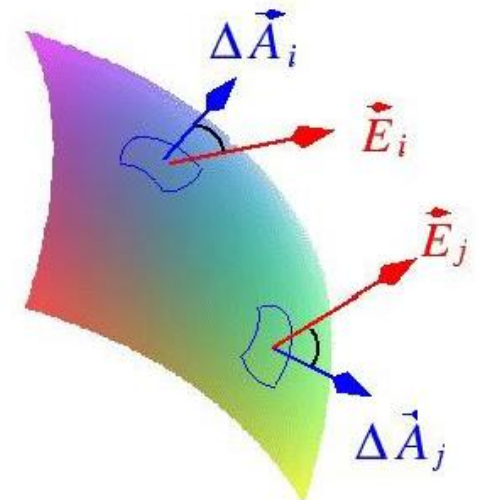
Figura 22.4 (a) Uma caixa com uma carga positiva $+q$. (b) Uma caixa idêntica com uma carga positiva $+2q$. Quando dobramos o valor da carga, dobramos o módulo de \vec{E} e o fluxo elétrico através da superfície. (c) A carga puntiforme positiva $+q$ no interior de uma caixa com o dobro das dimensões da caixa em $\frac{1}{4}$. O módulo de \vec{E} sobre a superfície se reduz a $\frac{1}{4}$, porém a área através da qual ele 'flui' torna-se quatro vezes maior.

Fluxo Elétrico, Φ

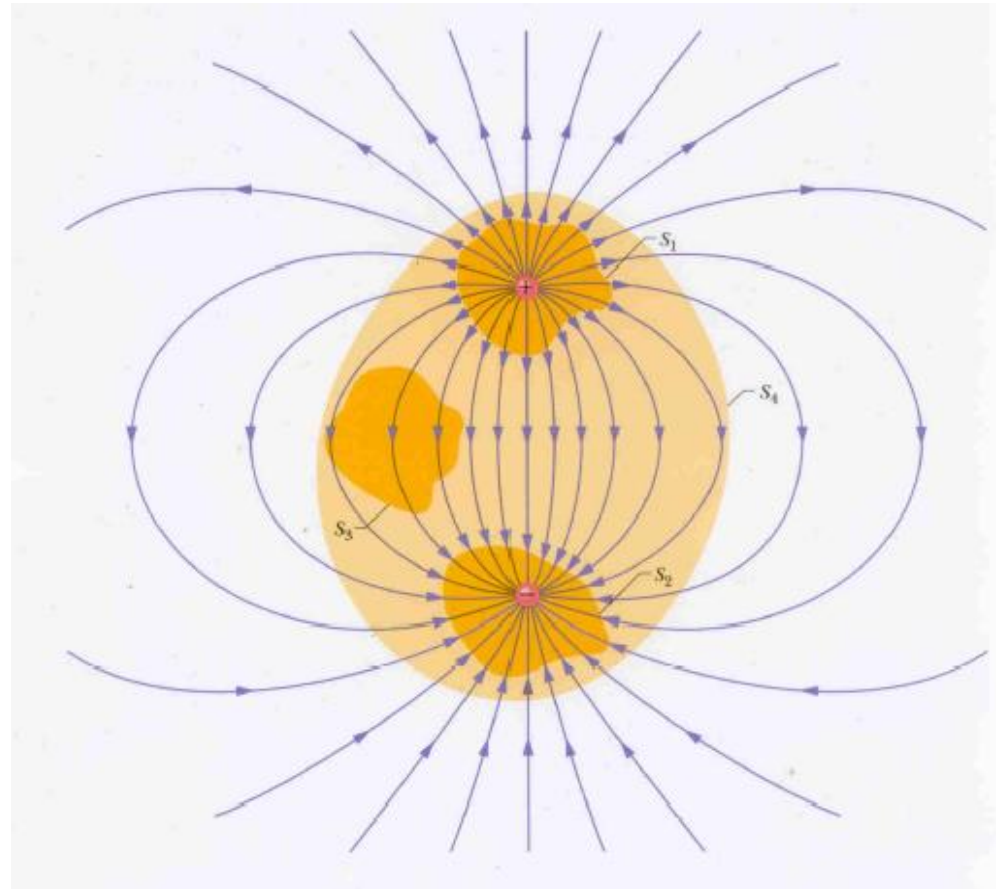
O cálculo do fluxo de campo consiste em contar a quantidade de linhas de campo que atravessam determinada área.



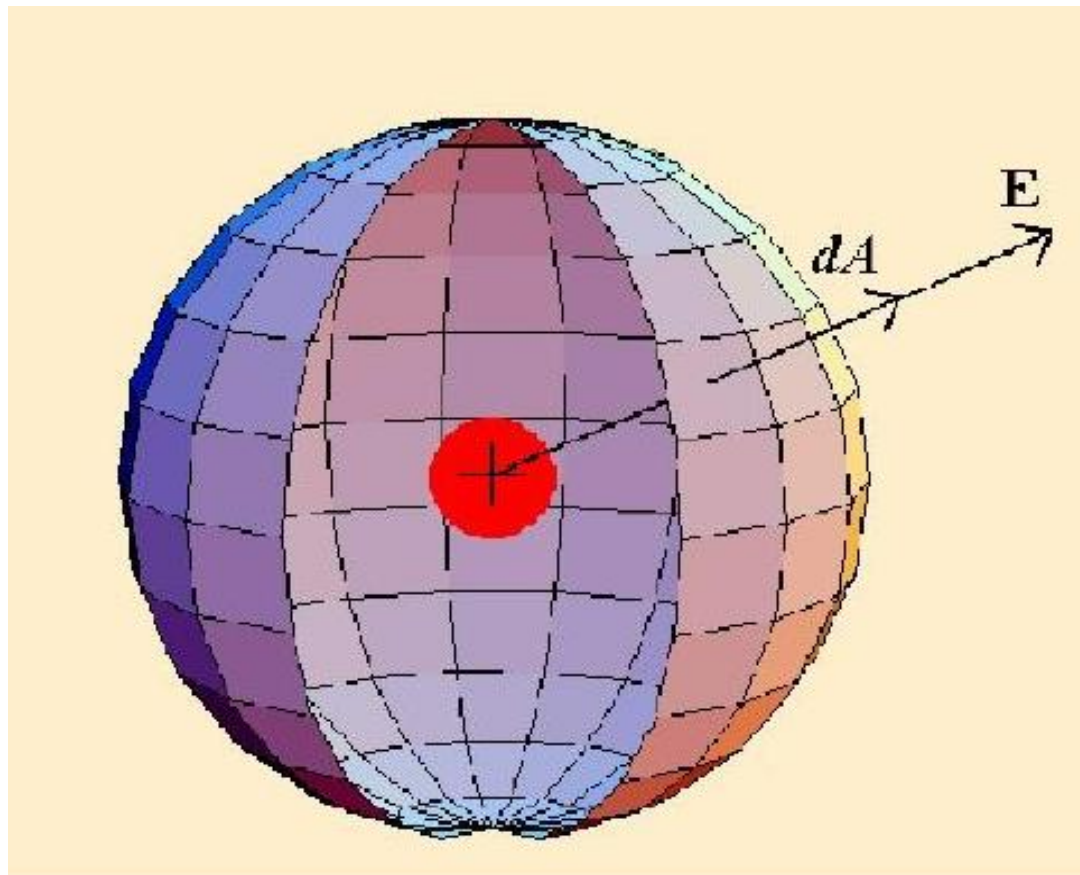
O fluxo de campo pode ser relacionado com a intensidade da componente do campo que atravessa a área perpendicularmente a ela.



Fluxo de linhas de campo elétrico



Fluxo Elétrico, Φ



Fluxo Elétrico

Proporcional ao número de linhas de campo elétrico que passam através da superfície.

Assume que a superfície é perpendicular às linhas

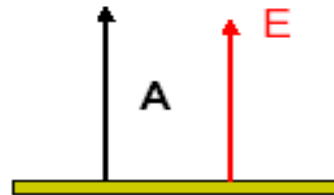
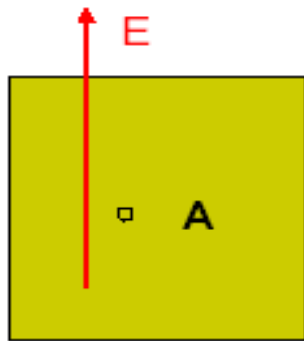
E se não for?

Considera-se a componente do vetor campo perpendicular à área.

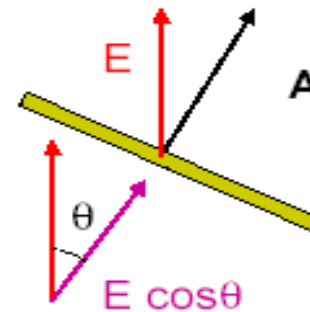
Matematicamente:

$$\Phi = \sum E \Delta A \cos\theta = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$$

Cálculo do fluxo



$$\Phi=EA$$

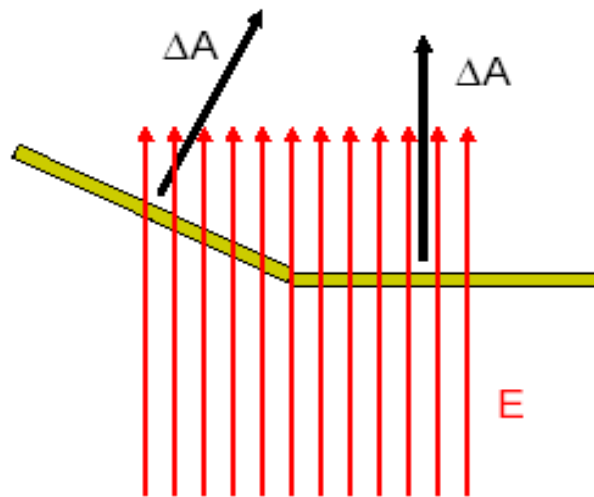


$$\Phi=EA\cos\theta$$



Caso Geral

Número de linhas que passam através de uma superfície



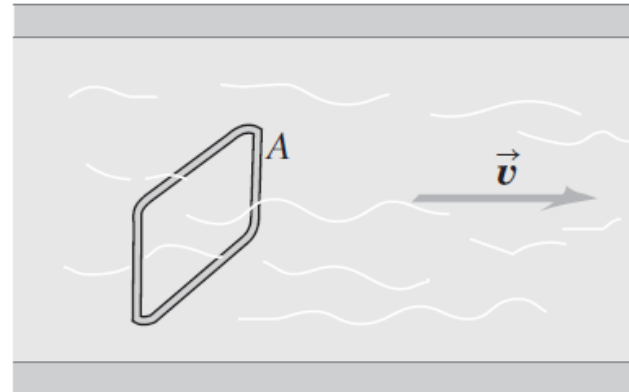
$$\Phi = \sum E \Delta A \cos\theta = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{A}$$

Somando todos os elementos

- Σ representa uma soma sobre um grande número de objetos
- Integral também é uma soma \rightarrow sobre um grande número de pequenos objetos infinitesimalmente pequenos, em nosso caso, pequenas áreas, $d\mathbf{A}$
- Assim

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(a) Uma espira retangular em um fluido



(b) A espira retangular inclinada a um ângulo ϕ

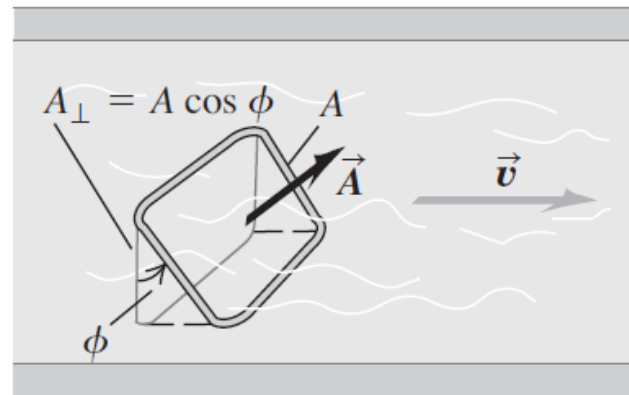
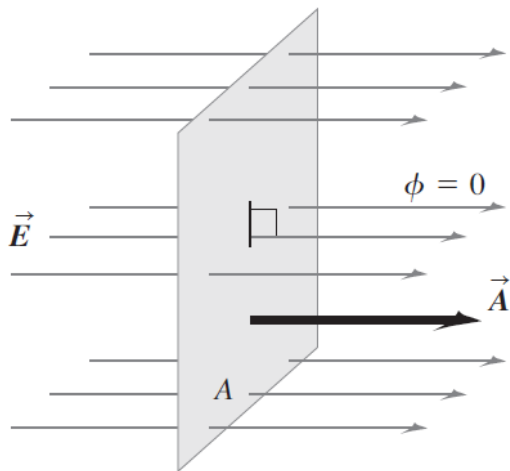
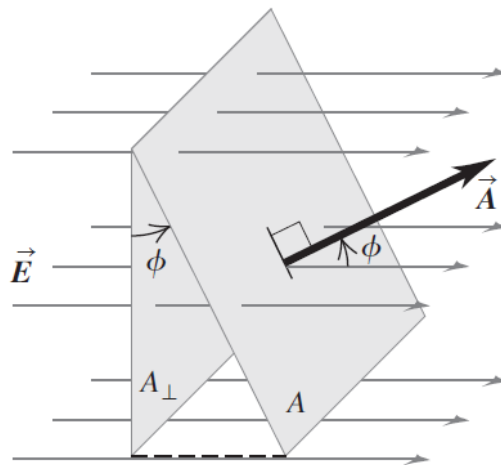


Figura 22.5 A vazão volumétrica de um fluido através da área da espira retangular de arame é dada por (a) vA quando a área do retângulo é perpendicular a \vec{v} e (b) $vA \cos \phi$ quando a área do retângulo está inclinada a um ângulo ϕ .

- (a) A superfície é frontal ao campo elétrico: \vec{E} e \vec{A} são paralelos (o ângulo entre \vec{E} e \vec{A} é $\phi = 0$).
- O fluxo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.



- (b) A superfície está inclinada em relação a uma orientação frontal, formando um ângulo ϕ :
- O ângulo entre \vec{E} e \vec{A} é ϕ .
 - O fluxo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.



- (c) A superfície é lateral ao campo elétrico: \vec{E} e \vec{A} são perpendiculares (o ângulo entre \vec{E} e \vec{A} é $\phi = 90^\circ$).
- O fluxo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90^\circ = 0$.

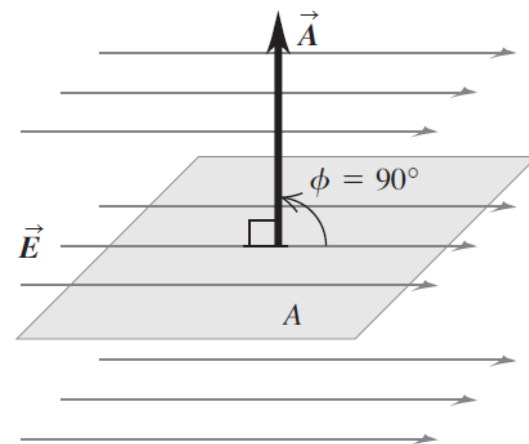


Figura 22.6 Uma superfície plana em um campo elétrico uniforme. O fluxo elétrico Φ_E através da superfície é igual ao produto escalar de \vec{E} e do vetor da área \vec{A} .

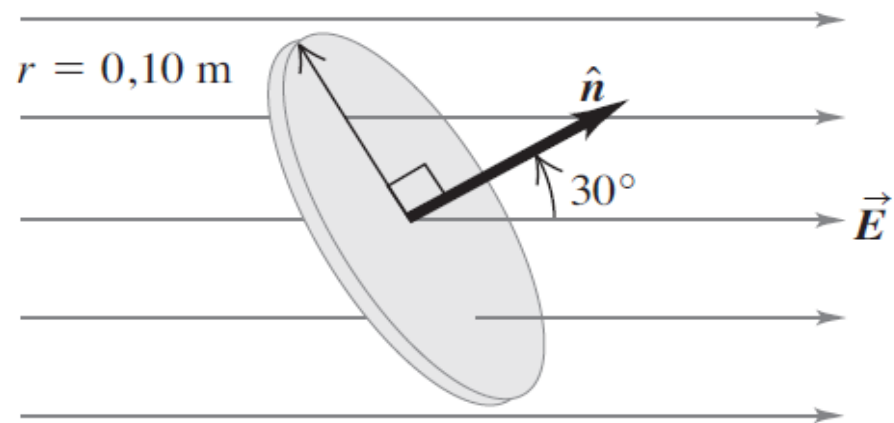


Figura 22.7 O fluxo elétrico Φ_E através de um disco depende do ângulo entre sua normal \hat{n} e o campo elétrico \vec{E} .

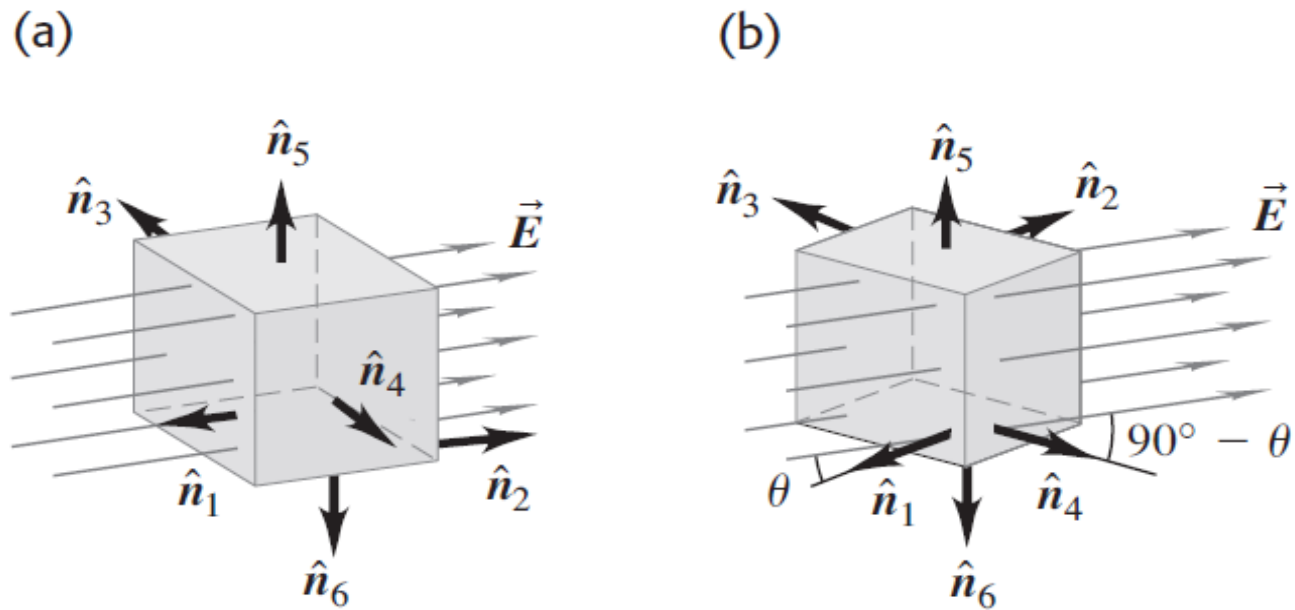


Figura 22.8 Fluxo de um campo elétrico uniforme \vec{E} através de uma caixa cúbica com aresta L em duas orientações.



Figura 22.10 Carl Friedrich Gauss ajudou a desenvolver diversos ramos da matemática, incluindo a geometria diferencial, a análise real e a teoria dos números. A 'curva do sino' da estatística é uma de suas invenções. Gauss também realizou sofisticadas investigações sobre campos magnéticos da Terra e calculou a órbita do primeiro asteroide a ser descoberto.

O mesmo número de linhas e o mesmo fluxo elétrico passam através de cada elemento de área

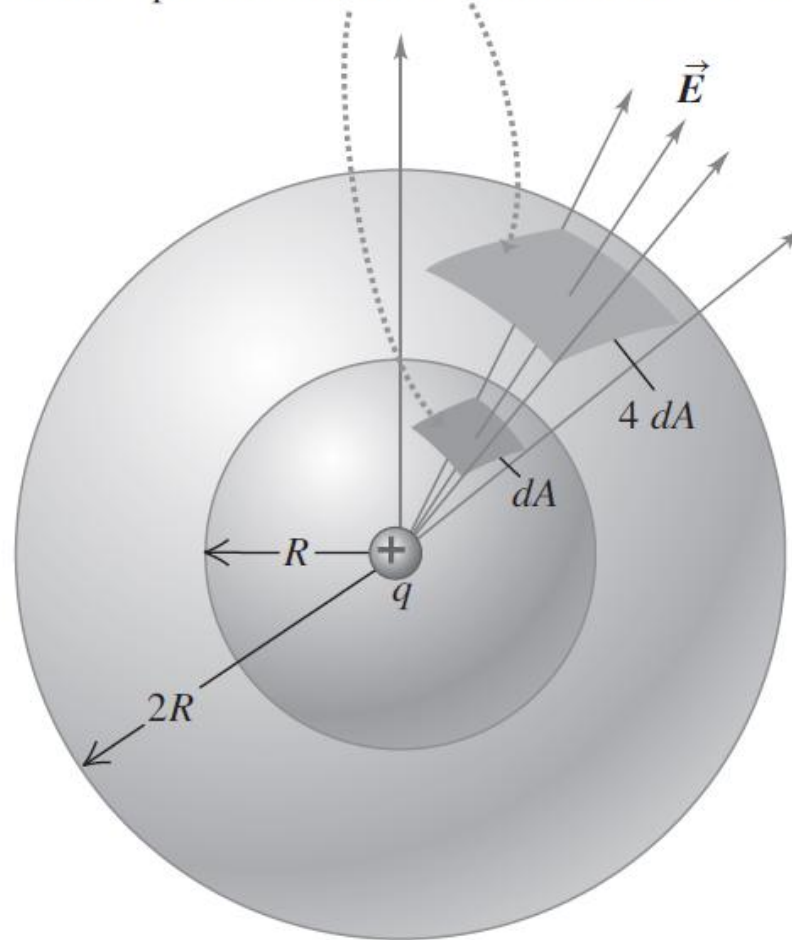
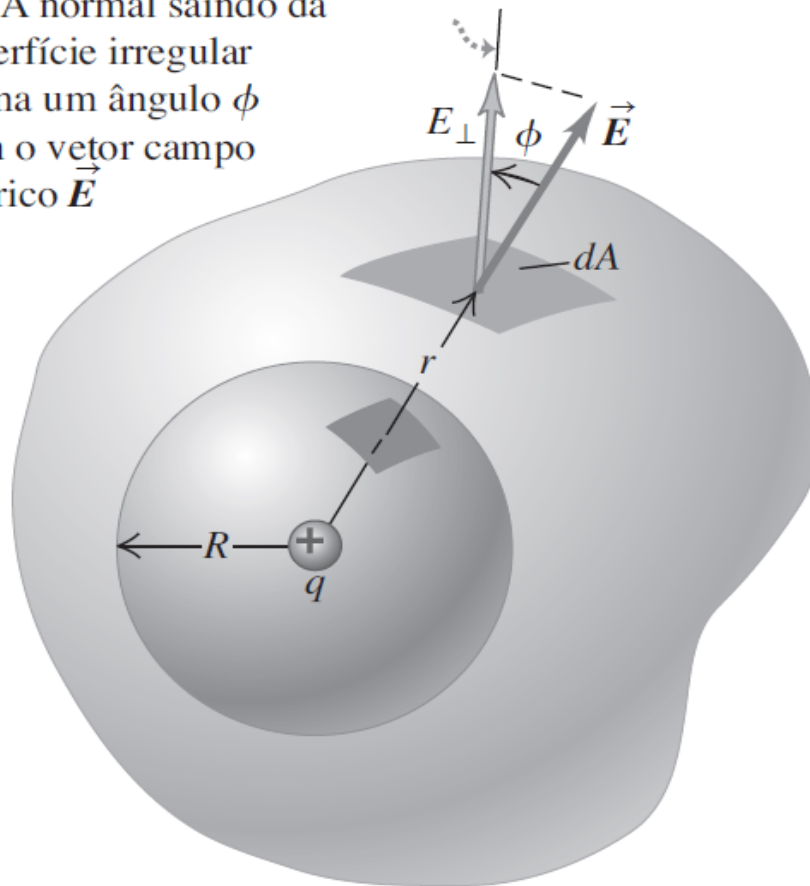


Figura 22.11 Projeção de um elemento de área dA de uma esfera de raio R sobre uma esfera concêntrica de raio igual a $2R$. A projeção multiplica cada dimensão linear por dois, de modo que o elemento de área sobre a esfera maior é igual a $4dA$.

(a) A normal saindo da superfície irregular forma um ângulo ϕ com o vetor campo elétrico \vec{E}



(b)

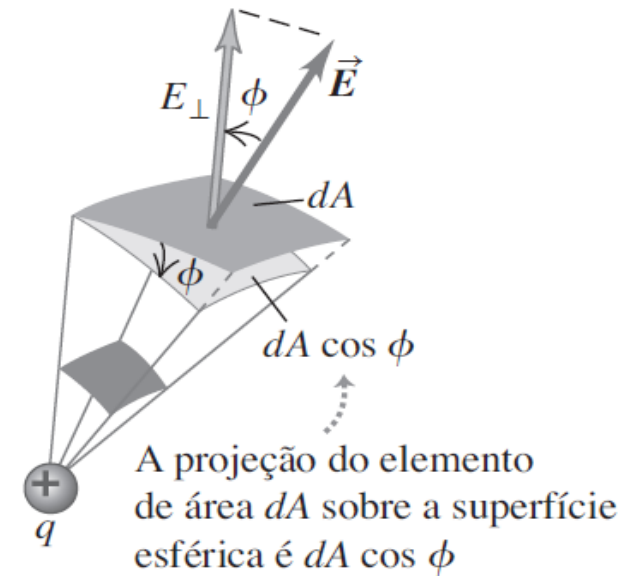


Figura 22.12 Cálculo do fluxo elétrico através de uma superfície não-esférica.

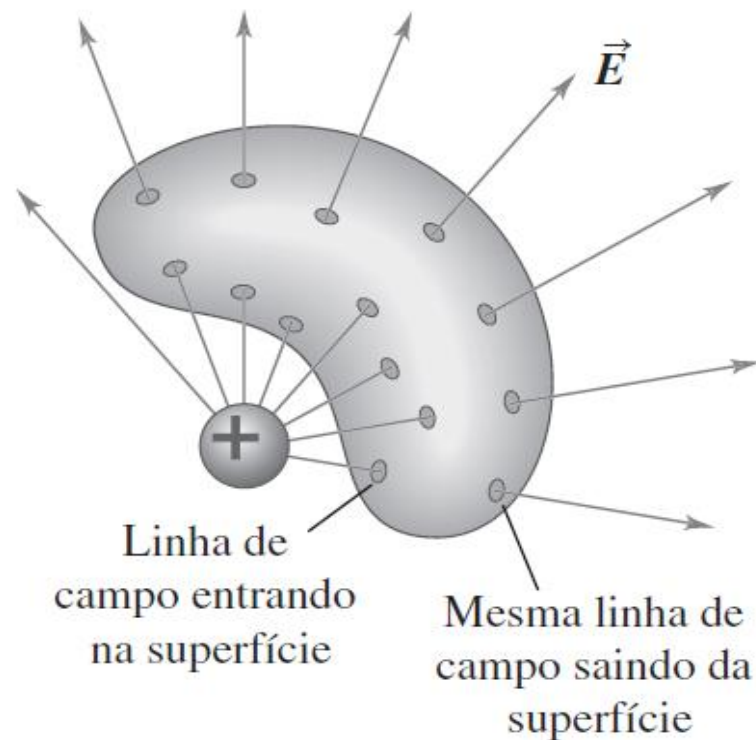
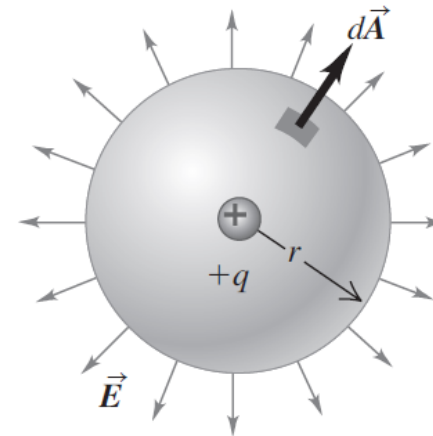


Figura 22.13 Uma carga puntiforme *no exterior* de uma superfície fechada que não engloba nenhuma carga. Se uma linha de campo elétrico da carga externa entra na superfície em um ponto, ela deve sair por outro ponto.

ATENÇÃO As superfícies gaussianas são imaginárias. Lembre-se de que a superfície fechada na lei de Gauss é *imaginária*. Não é necessário nenhum objeto material na posição da superfície. Frequentemente, nos referimos à superfície fechada usada na lei de Gauss como uma **superfície gaussiana**.

(a) Superfície gaussiana em torno de uma carga positiva: fluxo positivo (para fora)



(b) Superfície gaussiana em torno de uma carga negativa: fluxo positivo (para dentro)

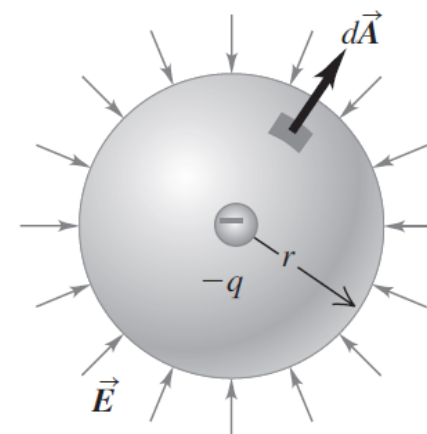


Figura 22.14 Superfícies gaussianas esféricas em torno de (a) uma carga puntiforme positiva e (b) uma carga puntiforme negativa.

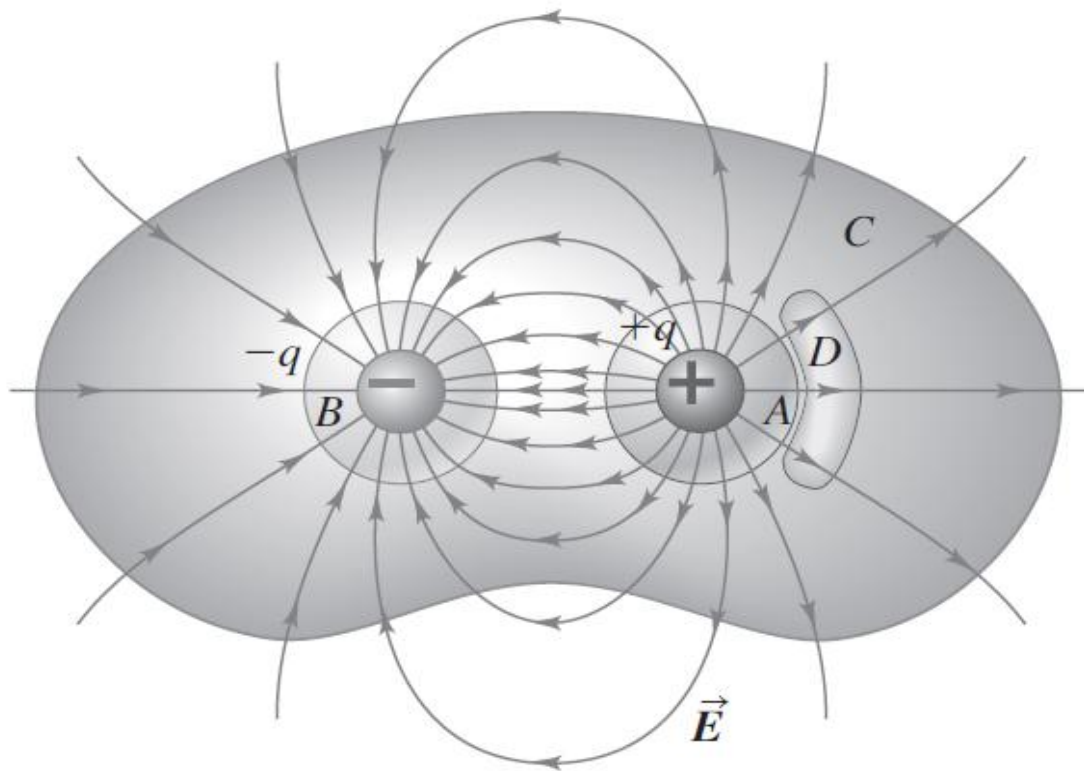


Figura 22.15 O número total de linhas de campo que atravessam uma superfície fechada é proporcional à carga elétrica total existente no interior da superfície.

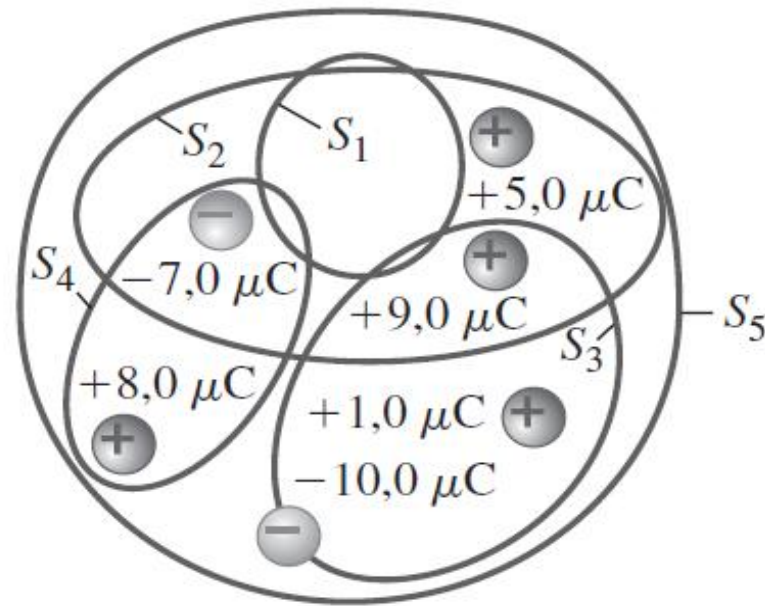
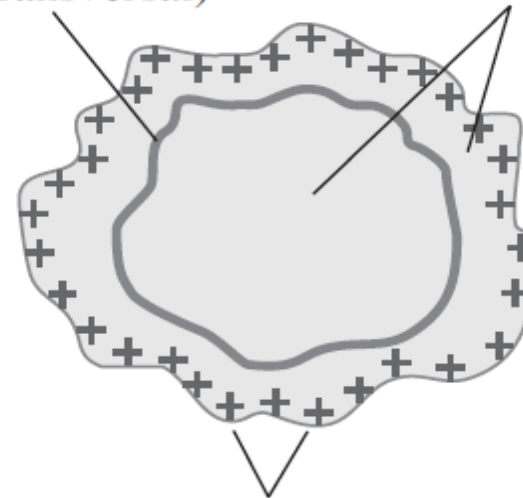


Figura 22.16 Cinco superfícies gaussianas e seis cargas puntiformes.

Superfície gaussiana A
no interior do
condutor
(corte transversal)

Condutor
(corte
transversal)



Carga sobre a superfície
do condutor

Figura 22.17 No equilíbrio eletrostático (as cargas não se movem), qualquer excesso de carga deve ficar localizado sobre a superfície de um condutor sólido.

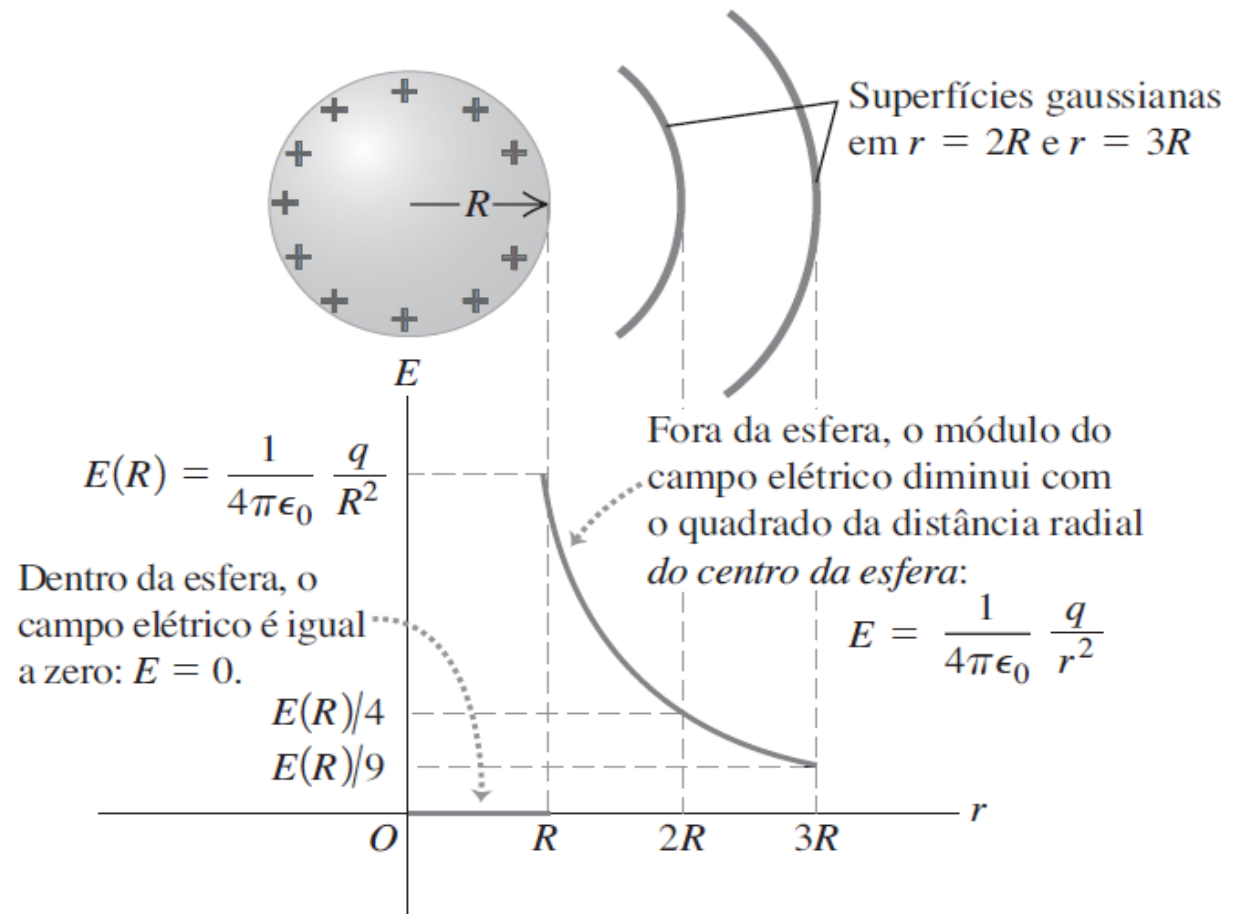


Figura 22.18 Cálculo do campo elétrico de uma esfera condutora com carga positiva q . Fora da esfera, o campo é o mesmo como se toda carga estivesse concentrada no centro da esfera.

ATENÇÃO O fluxo pode ser positivo ou negativo. Lembre-se de que escolhemos a carga q como *positiva*. Quando a carga é negativa, o campo elétrico é orientado radialmente *para dentro* da esfera em vez de para fora, e o fluxo elétrico através da superfície gaussiana é negativo. Os módulos dos campos elétricos fora da esfera e sobre a superfície da esfera são dados pelas mesmas expressões anteriores, lembrando que, nesse caso, q representa o *módulo* (valor absoluto) da carga.

Lei de Gauss

A quantidade de linhas emitidas por uma carga é proporcional à quantidade de cargas.

A intensidade do campo depende da densidade de linhas. → O campo elétrico deve ser proporcional à quantidade de cargas.

Para contar as linhas do campo, englobamos as cargas em uma superfície fechada → **Superfície Gaussiana**, arbitrariamente escolhida.

Matematicamente

$$\begin{aligned} \Phi &\propto q \\ \Phi &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \Phi = \frac{q_{englobada}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{englobada}}{\epsilon_0}$$

Carga pontual

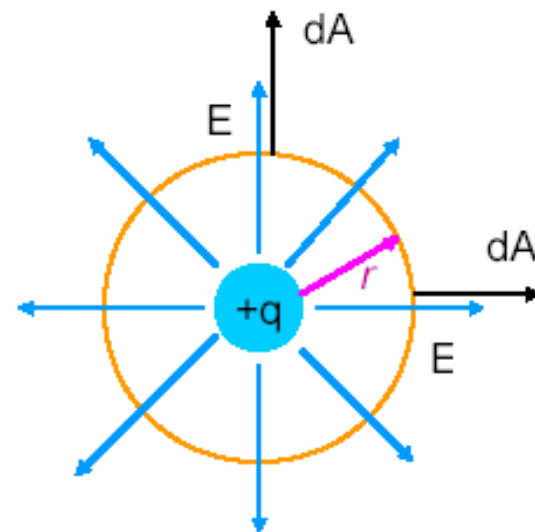
Quando usar: quando os objetos são esféricos e cargas pontuais.

O vetor normal à superfície é apontado para fora dela.

Integral sobre a superfície fechada:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2)$$

r é o raio da superfície introduzida.



Pela lei de Gauss

$$\Phi = \frac{q_{\text{englobada}}}{\epsilon_0}$$

$$q_{\text{englobada}} = q$$

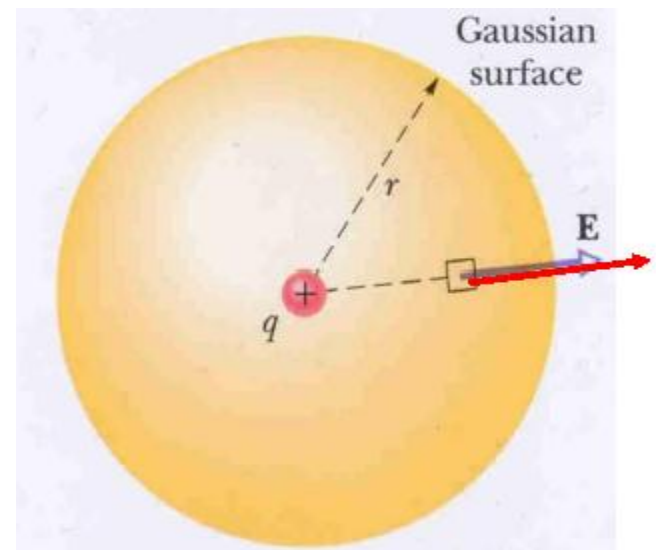
Como

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

então

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Superfície Cilíndrica

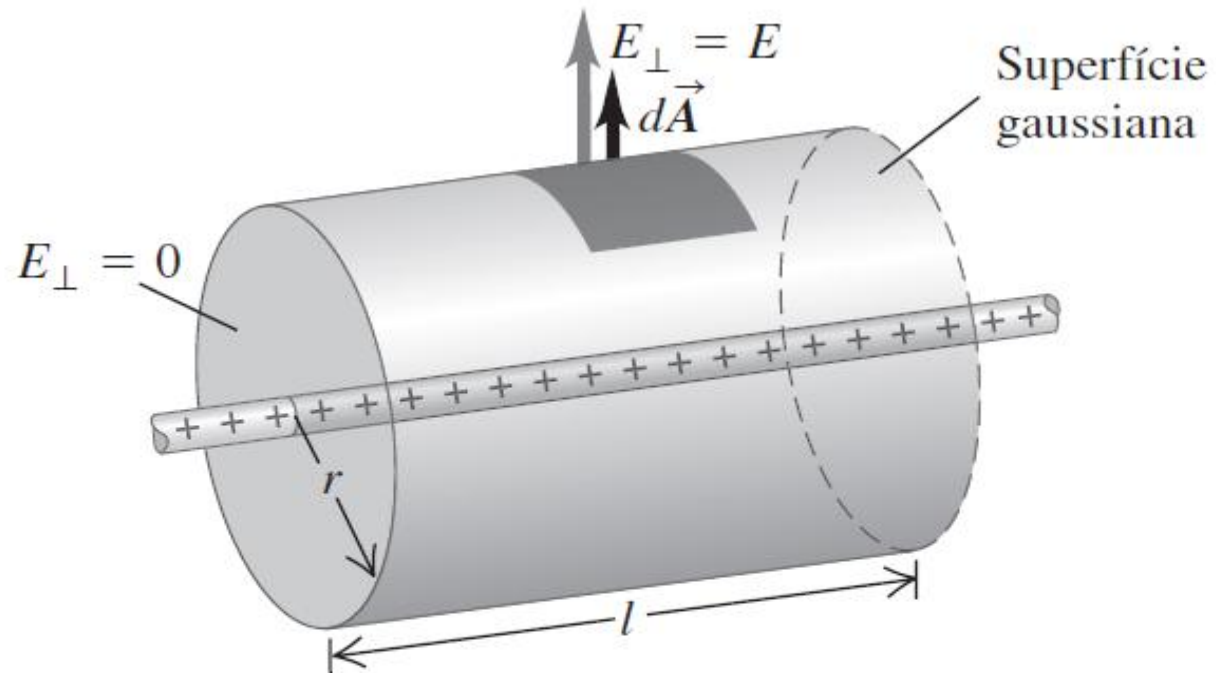


Figura 22.19 Uma superfície gaussiana cilíndrica coaxial é usada para a determinação do campo elétrico produzido no exterior de um fio carregado, infinitamente longo.

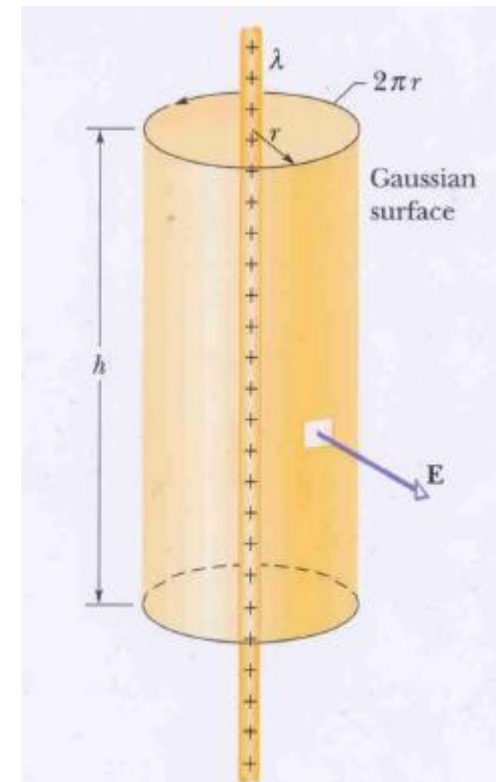
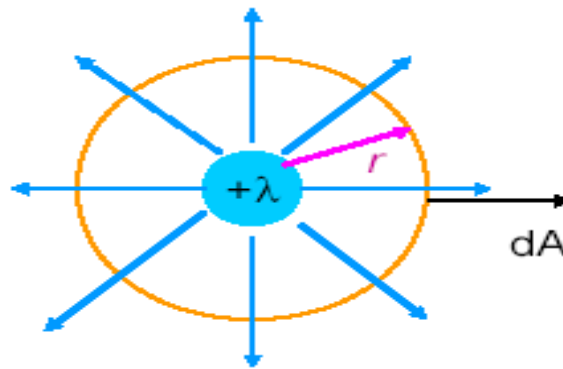
Fio Carregado

Quando usar: Com objetos de forma cilíndrica e linhas de carga.

Integral sobre a superfície:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi rL)$$

r é o raio da superfície cilíndrica



Consideramos uma linha de cargas infinita com densidade de carga uniforme, λ

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi rL)$$

e

$$\Phi = \frac{q_{englobada}}{\epsilon_0}$$



$$q_{englobada} = \lambda L$$

$$E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} \quad \text{ou}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} \hat{r}$$

Plano infinito carregado

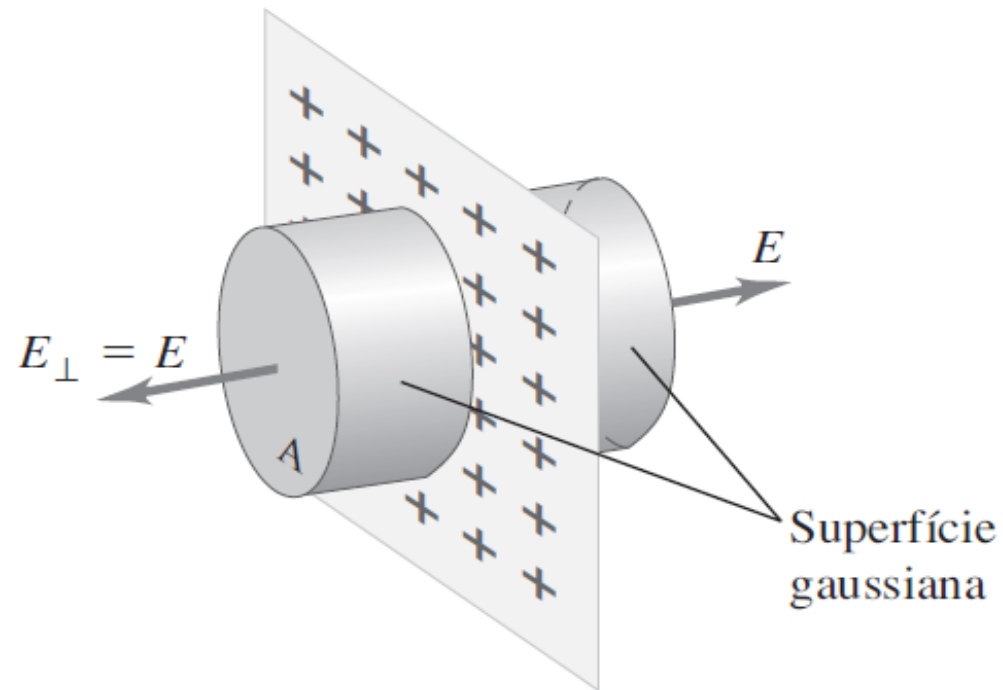


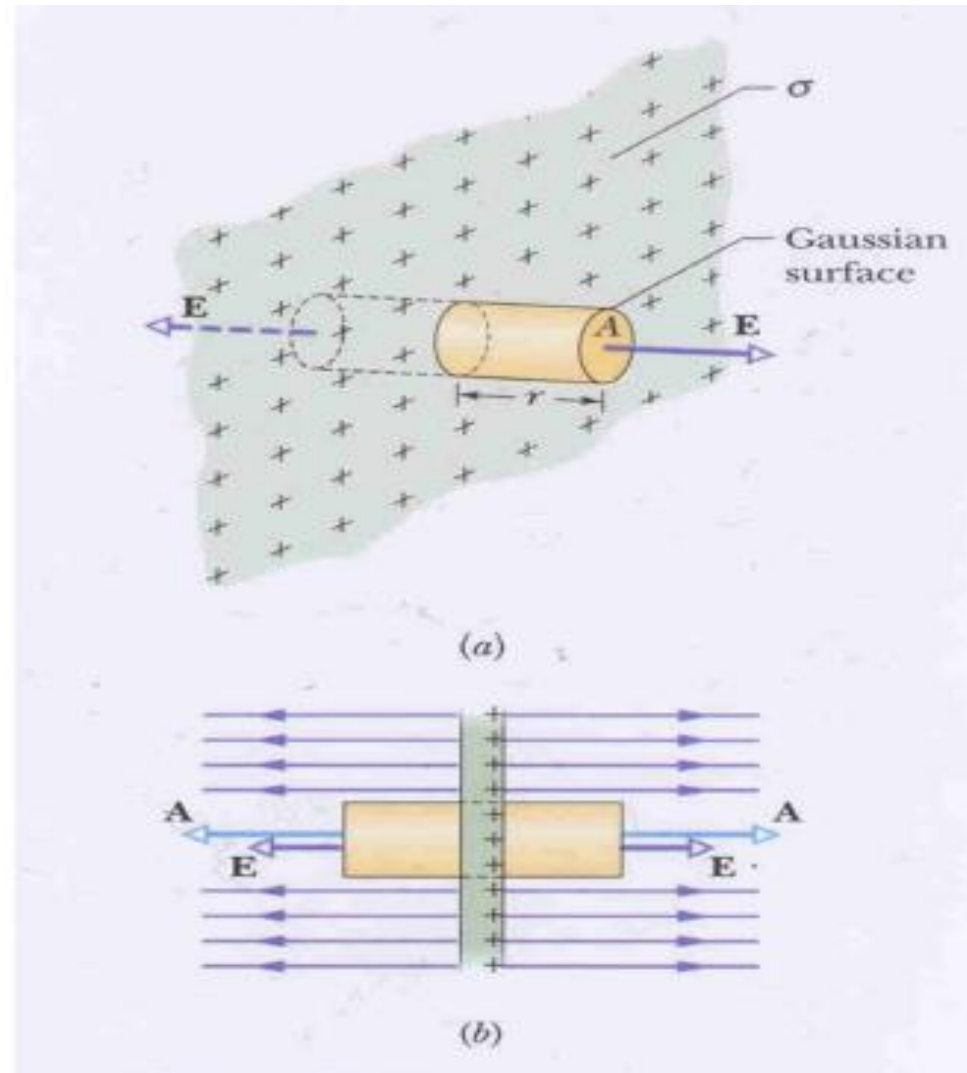
Figura 22.20 Uma superfície gaussiana cilíndrica é usada para a determinação do campo elétrico produzido por um plano infinito com uma distribuição de carga uniforme.

Quando usar: planos carregados e chapas planas

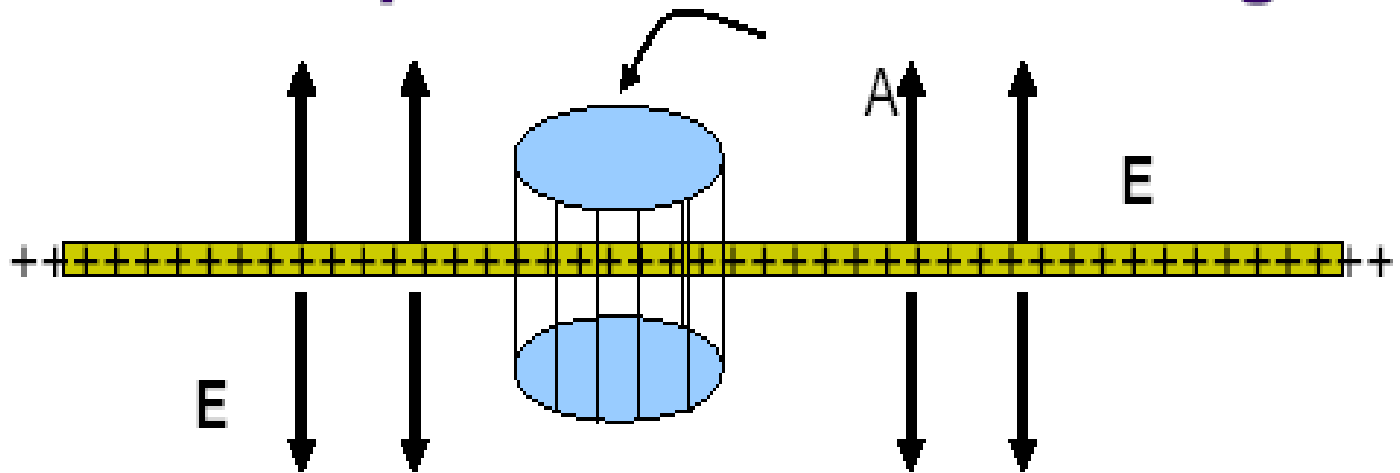
Integral sobre a superfície fechada

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$$

A é a área da tampa da caixa.



Campo de uma película infinita de cargas



Densidade superficial de cargas constante $\rightarrow \sigma = \frac{q}{A}$